数学　第１９回小テスト　解答解説

1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-3x+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

2 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2(1-5n)}$

3 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{5^n+3^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{n+1}-3^n)$

4 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin^3 x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$

5 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+x)}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

6 次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}$$

7 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$$(3+\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-1)+(5-3\sqrt{2})+\cdots\cdots$$

8 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-ax-b)=5$$

9 関数 $y=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$ のグラフをかけ。

10 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\boxed{}$

11 $[a]$ は a を超えない最大の整数を表すとすると $\displaystyle\lim_{x\to1-0}([2x]-2[x])=\boxed{}$

12 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a\cos^2 x+(3b+2)\sin x-2a+b+1}{\sin^3 x+a\cos^2 x-a}=c$ となるように実数の定数 a, b, c の値を定めよ.

配点

$\boxed{1}$	各5点計10点	$\boxed{10}$	10点
$\boxed{2}$	各5点計10点	$\boxed{11}$	10点
$\boxed{3}$	各5点計10点	$\boxed{12}$	10点　　計30点
$\boxed{4}$	各5点計20点		
$\boxed{5}$	各5点計15点		
$\boxed{6}$	8点		
$\boxed{7}$	7点		
$\boxed{8}$	10点		
$\boxed{9}$	関数7点，グラフ3点　計100点		

$\boxed{1}$ 解答　(1)　9　　(2)　$\dfrac{1}{6}$

$\boxed{2}$ 解答　(1)　$-\dfrac{1}{2}$　　(2)　0

$\boxed{3}$ 解答　(1)　1　　(2)　$-\infty$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　4　　(2)　$\dfrac{1}{2}$　　(3)　1　　(4)　$-\pi$

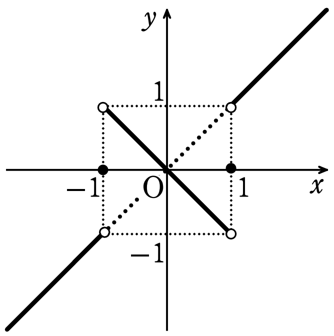
$\boxed{5}$ 解答　(1)　e^{-3}　　(2)　$\dfrac{1}{\log 2}$　　(3)　$\dfrac{1}{e}$

$\boxed{6}$ 解答　$\dfrac{9}{4}$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　収束，和 $\dfrac{8+5\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{8}$ 解答　$a=1$，$b=-3$

$\boxed{9}$ 解答



$\boxed{10}$ 解答　4

$\boxed{11}$ 解答　1

$\boxed{12}$ 解答　$a=\dfrac{1}{3}, b=-\dfrac{2}{3}, c=1$

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+1)^2}{x-1}=9$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(x+5)-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$

$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2-2n-2}{1-2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-2}$

$\displaystyle=\frac{1+0-0-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2(1-5n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2-5n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}-5}=\frac{0+0-0}{0-5}=0$

$\boxed{3}$ (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{5^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^{n+1}-3^n)=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right\}=-\infty$

$\boxed{4}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin 2x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x\cos x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x\cos x(1+\cos x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{2x\cos x(1+\cos x)}{\sin x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x(1+\cos x)=2\cdot1\cdot1\cdot(1+1)=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^3 x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos^2 x)}{\sin^3 x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{x\sin^2 x}{\sin^3 x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(3) $\sin x=t$ とおくと　$x\longrightarrow0$ のとき　$t\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

(4) $x-1=t$ とおくと　$x\longrightarrow1$ のとき　$t\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t+\pi)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\pi t}{t}=\lim_{t\to0}\left(-\pi\cdot\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)$

$=-\pi\cdot1=-\pi$

$\boxed{5}$ (1) $-\dfrac{3}{x}=h$ とおくと　$x=-\dfrac{3}{h}$

また，$x\longrightarrow\infty$ のとき $h\longrightarrow -0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{h\to -0}(1+h)^{-\frac{3}{h}}=\lim_{h\to -0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-3}=e^{-3}\quad\left(\frac{1}{e^{3}}\text{ でもよい}\right)$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_2(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_2(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_2 e=\frac{1}{\log 2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\frac{1}{e}$

$\boxed{6}$ $\dfrac{2^n-(-1)^n}{3^n}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ の公比は，それぞれ $\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{1}{3}$ であるから，これらはともに収束して，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{4}$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=2-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}$

$\boxed{7}$ 初項は $3+\sqrt{2}$，公比は $r=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{3+\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{8+5\sqrt{2}}{2}$$

$\boxed{8}$ $f(x)=\sqrt{x^2+4x}-ax-b$ とおく。$a\leqq 0$ とすると $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ となるから，

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=5$ となるための必要条件は　　$a>0$

$x\longrightarrow\infty$ のときを考えるから，$x>0$ としてよい。

よって　$f(x)=\dfrac{(x^2+4x)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+4x}+(ax+b)}=\dfrac{(1-a^2)x^2+(4-2ab)x-b^2}{\sqrt{x^2+4x}+(ax+b)}$

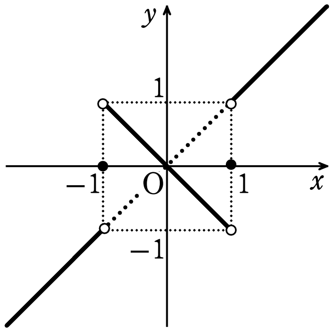
$$=\frac{(1-a^2)x+(4-2ab)-\dfrac{b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+a+\dfrac{b}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=5$ となるためには　$1-a^2=0$　…… ①，$\dfrac{4-2ab}{1+a}=5$　…… ②

$a>0$ であるから，① より　$a=1$　　　ゆえに，② から　$b=-3$

よって　　$a=1$，$b=-3$

$\boxed{9}$ [1]　$|x|>1$ のとき　$y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2n-1}}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2n}}=x$



[2]　$x=-1$ のとき　$y=\dfrac{-1-(-1)}{1+1}=0$

[3]　$x=1$ のとき　$y=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

[4]　$|x|<1$ のとき　$y=\dfrac{0-x}{0+1}=-x$

以上から，求めるグラフは右図。

$\boxed{10}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x\sin(-x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(4\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=4\cdot 1\cdot 1=4$$

$\boxed{11}$ $\lim\limits_{x\to 1-0}([2x]-2[x])=\lim\limits_{x\to 1-0}[2x]-2\lim\limits_{x\to 1-0}[x]$

$=1-2\times 0=1$

12 分母について $\lim_{x\to 0}(\sin^3 x + a\cos^2 x - a) = 0$ であるから，分子について

$\lim_{x\to 0}\{a\cos^2 x + (3b+2)\sin x - 2a + b + 1\} = 0$ でなければならない．

よって　$a + 0 - 2a + b + 1 = 0$　　ゆえに　$b = a - 1$ …… ①

このとき　(与式) $= \lim_{x\to 0}\dfrac{a(1-\sin^2 x) + (3a-1)\sin x - a}{\sin^3 x + a(1-\sin^2 x) - a}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-a\sin^2 x + (3a-1)\sin x}{\sin^3 x - a\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-a\sin x + 3a - 1}{\sin x(\sin x - a)} \quad \cdots\cdots ②$$

分母について $\lim_{x\to 0}\sin x(\sin x - a) = 0$ であるから，上と同様に

$\lim_{x\to 0}(-a\sin x + 3a - 1) = 0$　　よって　$3a - 1 = 0$

ゆえに　$a = \dfrac{1}{3}$　　① から　$b = -\dfrac{2}{3}$

② から　$c = \lim_{x\to 0}\dfrac{-a\sin x}{\sin x(\sin x - a)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{-1}{3\sin x - 1} = 1$