1 二次関数

1-1 (r1-2)

２次方程式

$$x^2-2kx+k+2=0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

について，次の問いに答えよ。ただし，kは実数とする。

(1)　$(*)$が1より大きい相異なる2つの実数解を持つような定数kの値の範囲を求めよ。

(2)　$(*)$の2つの実数解α，βが，$1<\alpha<2$かつ$2<\beta<3$を満たすような定数kの値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^2-2kx+k+2$ とすると，$(*)$ の実数解は放物線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標と一致する．

また，

$$f(x)=(x-k)^2-k^2+k+2.$$

(1)　$(*)$ が 1 より大きい相異なる 2 つの実数解をもつ条件は，

$$\begin{cases} k>1, \\ f(k)<0, \\ f(1)>0 \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} k>1, \\ -k^2+k+2<0, \\ 1-2k+k+2>0 \end{cases}$$

であるから，求める k の値の範囲は，

$$2<k<3.$$

(2)　$(*)$ の 2 つの実数解 α，β が，

$$1<\alpha<2 \text{かつ} 2<\beta<3$$

となる条件は，

$$\begin{cases} f(1)>0, \\ f(2)<0, \\ f(3)>0 \end{cases}$$

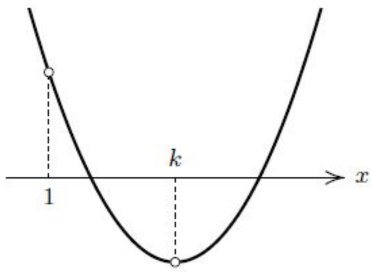
すなわち，

$$\begin{cases} 1-2k+k+2>0, \\ 4-4k+k+2<0, \\ 9-6k+k+2>0 \end{cases}$$

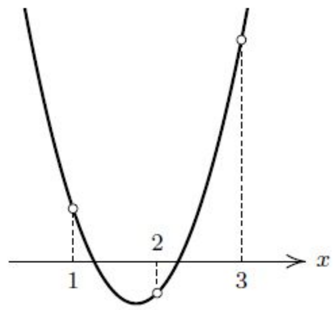
であるから，求める k の値の範囲は，

$$2<k<\frac{11}{5}.$$

(1) の条件を満たす $y=f(x)$ のグラフは次の図のようになります。.



(2) の条件を満たす $y=f(x)$ のグラフは次の図のようになります。



1-2 (j3-1)

aを実数とし，$f(x)=x^2-2x+2$，$g(x)=-x^2+ax+a$とする。

(1)　すべての実数s，tに対して，$f(s)\geqq g(t)$が成り立つようなaの値の範囲を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$を満たすすべてのxに対して，$f(x)\geqq g(x)$が成り立つようなaの値の範囲を求めよ。

(1)　$f(x)$，$g(x)$ を変形すると，

$$f(x)=(x-1)^2+1,$$

$$g(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a$$

であるから，すべての実数 s，t に対して $f(s)\geqq g(t)$ が成り立つ条件は，

$$1\geqq\frac{a^2}{4}+a.$$

これより，求める a の値の範囲は，

$$-2-2\sqrt{2}\leqq a\leqq -2+2\sqrt{2}.$$

(2)　$h(x)=f(x)-g(x)$ とすると，

$$\begin{aligned}h(x)&=2x^2-(a+2)x-a+2\\&=2\left(x-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

であるから，放物線 $y=h(x)$ の軸 $x=\dfrac{a+2}{4}$ と区間 $0\leqq x\leqq 1$ の位置関係で場合分けをして，$h(x)$ の最小値 $m(a)$ を求めると，次のようになる．

$$m(a)=\begin{cases}h(0)=-a+2 & (a<-2\text{のとき})\\ h\left(\dfrac{a+2}{4}\right)=-\dfrac{1}{8}a^2-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{3}{2} & (-2\leqq a\leqq 2\text{のとき})\\ h(1)=-2a+2 & (a>2\text{のとき})\end{cases}$$

(i)　$a<-2$ のとき，

$m(a)=-a+2>0$ なので，適．

(ii)　$-2\leqq a\leqq 2$ のとき，$m(a)\geqq 0$ より，

$$a^2+12a-12\leqq 0$$

$$-6-4\sqrt{3}\leqq a\leqq -6+4\sqrt{3}.$$

$-2\leqq a\leqq 2$ より，

$$-2\leqq a\leqq -6+4\sqrt{3}.$$

(iii)　$a>2$ のとき，

$m(a)=-2a+2<0$ なので，不適．

(i)，(ii)，(iii) より，求める a の値の範囲は，

$$a\leqq -6+4\sqrt{3}.$$

1-3 (s4-1)

実数を係数とする2次方程式$x^2-2ax+a+6=0$が，次の条件を満たすとき，定数aの値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　正の解と負の解をもつ。

(2)　異なる2つの負の解をもつ。

(3)　すべての解が1より大きい。

$f(x)=x^2-2ax+a+6$とすると，

$$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+6.$$

(1)　条件は，

$$f(0)<0$$

であるから，

$$a<-6.$$

(2)　条件は，

$$\begin{cases} a<0, \\ f(a)<0, \\ f(0)>0 \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} a<0, \\ (a+2)(a-3)>0, \\ a+6>0. \end{cases}$$

したがって，

$$-6<a<-2.$$

(3)　条件は，

$$\begin{cases} a>1, \\ f(a)\leqq 0, \\ f(1)>0 \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} a>1, \\ (a+2)(a-3)\geqq 0, \\ 7-a>0. \end{cases}$$

したがって，

$$3\leqq a<7.$$

1-4 (j5-1)

実数xに対して，　満たす整数nを$[\,x\,]$で表すとき，

$$4[\,x\,]^2-36[\,x\,]+45<0$$

を満たす$[\,x\,]$の範囲を求めよ。

$4[\,x\,]^2-36[\,x\,]+45<0$より，

$$(2[\,x\,]-3)(2[\,x\,]-15)<0$$

であるから，

$$\frac{3}{2}<[\,x\,]<\frac{15}{2}.$$

さらに，$[\,x\,]$は整数であるから，

$$2\leqq[\,x\,]\leqq 7.$$

したがって，

$$2\leqq x<8.$$

1-5 (j11-5)【問題は略】

①の方程式を変形すると，
$$y=(x-b)^2-b^2-\frac{4}{3}b+\frac{5}{9}$$
であるから，①のグラフの頂点の座標は，
$$\left(b,\quad -b^2-\frac{4}{3}b+\frac{9}{5}\right).$$

(1)　①のグラフが関数 $y=ax^2-2x+c$ のグラフと原点に関して対称となるのは，
$$a=-1$$
のとき．

このとき，
$$\begin{aligned} y &= -x^2-2x+c \\ &= -(x+1)^2+c+1 \end{aligned}$$
であるから，関数 $y=ax^2-2x+c$ のグラフの頂点の座標は，
$$(-1,\quad c+1).$$

したがって，①のグラフが関数 $y=ax^2-2x+c$ のグラフと原点に関して対称となる条件は，
$$b=-(-1)\text{ かつ }-b^2-\frac{4}{3}b-\frac{5}{9}=-(c+1).$$

これを解くと，
$$b=1,\qquad c=\frac{7}{9}.$$
$b=1$ のとき，①のグラフの頂点の座標は，
$$\left(1,\quad -\frac{16}{9}\right)$$
であり，関数 $y=x(x+4)$ のグラフの頂点の座標は，
$$y=(x+2)^2-4$$
より，
$$(-2,\quad -4).$$

s，t の定め方より，
$$\begin{cases} s=1-(-2)=3, \\ t=-\dfrac{16}{9}-(-4)=\dfrac{20}{9}. \end{cases}$$

(2)　関数①のグラフの軸 $x=b$ と区間 $0 \leqq x \leqq 1$ の位置関係で場合分けすると，次のようになる．

(i)　$b<0$ のとき，関数①が最小となるのは $x=0$ のときであるから，

$$m=-\frac{4}{3}b+\frac{5}{9}.$$

(ii)　$0 \leqq b \leqq 1$ のとき，関数①が最小となるのは $x=b$ のときであるから，

$$m=-b^2-\frac{4}{3}b+\frac{5}{9}.$$

(iii)　$b>1$ のとき，関数①が最小となるのは $x=1$ のときであるから，

$$\begin{aligned} m&=1^2-2b-\frac{4}{3}b+\frac{5}{9} \\ &=-\frac{10}{3}b+\frac{14}{9}. \end{aligned}$$

ここで，$m=f(b)$ とすると，

$$f(0)=\frac{5}{9}$$

であるから，$b<0$ のとき，

$$m>0.$$

また，

$$f(1)=-\frac{16}{9}$$

であるから，$b>1$ のとき，

$$m<0.$$

さらに，$0 \leqq b \leqq 1$ のとき，$m<0$ より，

$$-b^2-\frac{4}{3}b+\frac{5}{9}<0$$

$$9b^2+12b-5>0$$

$$(3b+5)(3b-1)>0$$

$$b<-\frac{5}{3},\quad \frac{1}{3}<b$$

であるから，

$$\frac{1}{3}<b \leqq 1.$$

以上より，$m<0$ となる b の値の範囲は，

$$b>\frac{1}{3}.$$

また，

$$g(x)=x^2-2bx-\frac{4}{3}b+\frac{5}{9}$$

とすると，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で①のグラフと x 軸が異なる 2 点で交わる条件は，

$$\begin{cases} 0<b<1, \\ -b^2-\dfrac{4}{3}b+\dfrac{5}{9}<0, \\ g(0)=-\dfrac{4}{3}b+\dfrac{5}{9} \geqq 0, \\ g(1)=-\dfrac{10}{3}b+\dfrac{14}{9} \geqq 0 \end{cases}$$

であるから，

$$\frac{1}{3}<b \leqq \frac{5}{12}.$$

1-6 (r19-1)

　すべての実数 x に対して不等式 $4x^2-8x+19 \leqq K(x^2+1)$ が成り立つような定数 K の最小値を求めよ。

$$f(x)=K(x^2+1)-(4x^2-8x+19)$$

とすると，

$$f(x)=(K-4)x^2+8x+K-19$$

であるから，すべての実数 x に対して，$f(x) \geqq 0$ である条件は，

$$\begin{cases} K-4>0, \\ (f(x)=0\text{ の判別式}) \leqq 0. \end{cases}$$

　これより，

$$\begin{cases} K>4, \\ K \leqq 3,\quad 20 \leqq K \end{cases}$$

であるから，求める K の値の範囲は，

$$K \geqq 20.$$

　よって，求める K の最小値は，

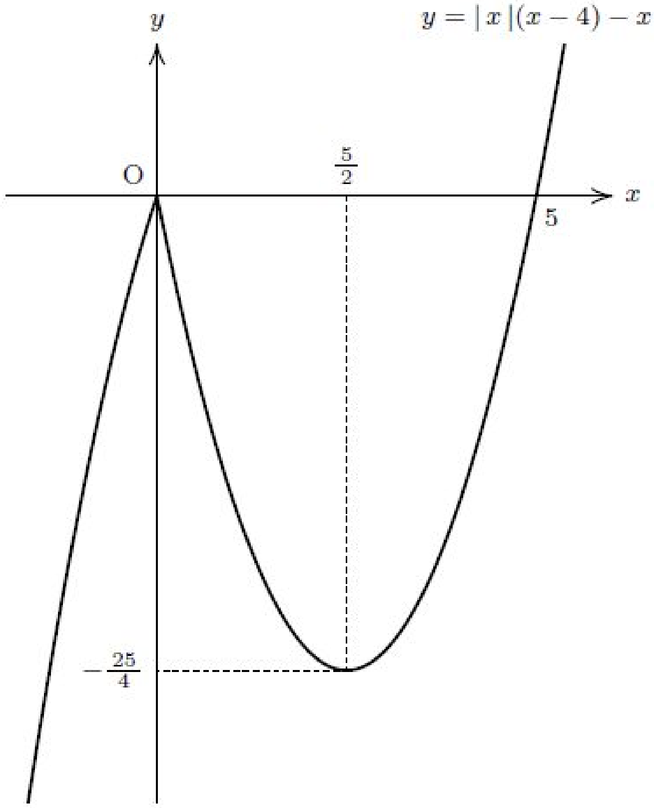
$$20.$$

1-7 (j26-1)

m を実数とする。関数 $y=|x|(x-4)-x-m$ のグラフが x 軸と相異なる3点で交わるような m の値の範囲を求めよ。

関数 $y=|x|(x-4)-x-m$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，曲線 $y=|x|(x-4)-x$ と直線 $y=m$ との共有点の個数と一致する．

$$y=\begin{cases} x(x-4)-x=x^2-5x & (x\geqq 0\text{ のとき}), \\ -x(x-4)-x=-x^2+3x & (x<0\text{ のとき}). \end{cases}$$



以上より，求める m の値の範囲は，

$$-\frac{25}{4}<m<0.$$

1-8 (r27-1)

実数 a に対して，2次関数 $f(x)=x^2-ax-a^2+5a$ を考える．

(1) 方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつような a の範囲を求めよ．

(2) 2次関数 $y=f(x)$ のグラフが2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ を通り，$1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$ となるような a の範囲を求めよ．

$f(x)=x^2-ax-a^2+5a$ より，

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{5}{4}a^2+5a.$$

(1)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，

$$f\left(\frac{a}{2}\right)<0$$

であるから，

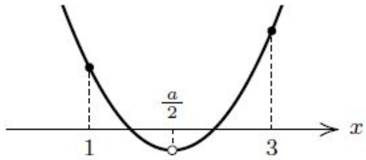
$$-\frac{5}{4}a^2+5a<0$$

$$a(a-4)>0.$$

これより，求める a の値の範囲は，

$$a<0,\quad 4<a$$

(2)　条件を満たす 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは次のようになる．



a が満たすべき条件は，

$$\begin{cases} 1<\dfrac{a}{2}<3, \\ f\left(\dfrac{a}{2}\right)<0, \\ f(1)\geqq 0, \\ f(3)\geqq 0 \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} 2<a<6, \\ a<0,\quad 4<a, \\ a^2-4a-1\leqq 0, \\ a^2-2a-9\leqq 0 \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} 2<a<6, \\ a<0 \text{ または } 4<a, \\ 2-\sqrt{5}\leqq a\leqq 2+\sqrt{5}, \\ 1-\sqrt{10}\leqq a\leqq 1+\sqrt{10}. \end{cases}$$

これより，求める a の値の範囲は，

$$4<a\leqq 1+\sqrt{10}.$$

1-9 (j28-1)

実数 a に対して，2 つの放物線

$$C_1\ :\ y=2-x^2,\quad C_2\ :\ y=x^2-4x+a$$

を考える．C_1，C_2 が $y>0$ である交点を 2 つもつような a の範囲を求めよ．

C_1 において，$y > 0$ のとき，

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

また，C_1，C_2 の方程式を連立すると，

$$2 - x^2 = x^2 - 4x + a$$

$$2x^2 - 4x + a - 2 = 0.$$

ここで，

$$f(x) = 2x^2 - 4x + a - 2$$

とすると，

$$f(x) = 2(x-1)^2 + a - 4$$

であるから，条件が成り立つためには，

$$\begin{cases} a - 4 < 0, \\ f(\sqrt{2}) > 0. \end{cases}$$

したがって，

$$4\sqrt{2} - 2 < a < 4.$$

1-10 (j35-1)

2 次関数 $y = -x^2 + 2ax - 16$ の区間 $1 \leqq x \leqq 2$ における最大値が 0 であるとき，定数 a の値は (　　) である．

$y = -x^2 + 2ax - 16$ より，

$$y = -(x-a)^2 + a^2 - 16$$

であるから，軸 $x = a$ と区間 $1 \leqq x \leqq 2$ の位置関係で場合分けをして，y の最大値について考える．

(i)　$a < 1$ のとき，y は $x = 1$ のとき，最大となる．

条件より，

$$-1 + 2a - 16 = 0$$

$$a = \frac{17}{2}$$

となるが，$a < 1$ に反する．

(ii)　$1 \leqq a \leqq 2$ のとき，y は $x = a$ のとき，最大となる．

条件より，

$$a^2 - 16 = 0$$

$$a = \pm 4$$

となるが，$1 \leqq a \leqq 2$ に反する．

(iii)　$a > 2$ のとき，y は $x = 2$ のとき，最大となる．

条件より，

$$-4 + 4a - 16 = 0$$

$$a = 5.$$

以上より，求める a の値は，

$$a = 5.$$

1-11 (s37-3)

(1) x についての方程式 $x+\dfrac{1}{x}=t$ が異なる 2 つの正の解をもつような実数 t の値の範囲を求めよ．

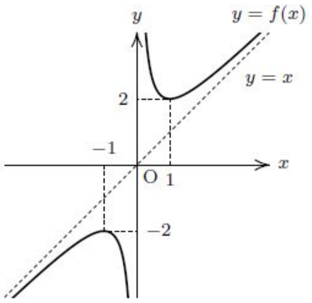
(2) x についての 4 次方程式 $x^4-ax^3+11x^2-ax+1=0$ が異なる 4 つの正の実数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ．

(1)
$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$
とおくと，方程式 $f(x)=t$ の実数解は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=t$ との共有点の x 座標と一致する．

また，
$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$
であるから，$x>0$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	2	↗

さらに，
$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty$$
であるから，曲線 $y=f(x)$ は次のようになる．



したがって，方程式 $f(x)=t$ が相異なる 2 つの正の解をもつような t の値の範囲は，
$$t>2.$$

(2)
$$x^4-ax^3+11x^2-ax+1=0 \qquad \cdots ①$$
は $x=0$ を解にもたないので，両辺を x^2 で割ると，
$$x^2-ax+11-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$
これより，
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-a\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$$
であるから，$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと，
$$t^2-at+9=0. \qquad \cdots ②$$
したがって，①が相異なる 4 つの正の解をもつのは，(1) より，②が $t>2$ の範囲に相異なる 2 つの解をもつときである．

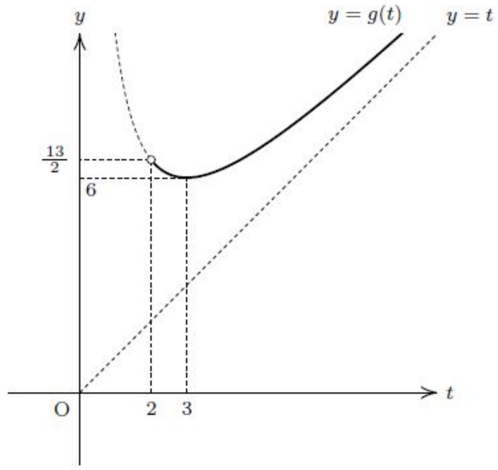
さらに，②は $t=0$ を解にもたないので，両辺を t で割ると，
$$t-a+\frac{9}{t}=0$$
であるから，
$$t+\frac{9}{t}=a. \qquad \cdots ③$$

ここで，
$$g(t)=t+\frac{9}{t}$$
とおくと，③の実数解は曲線 $y=g(t)$ と直線 $y=a$ との共有点の t 座標と一致し，③の実数解と②の実数解は一致するので，①が相異なる 4 つの正の解をもつのは，$t>2$ において，曲線 $y=g(t)$ と直線 $y=a$ が相異なる 2 つの共有点をもつときである．

また，
$$g'(t)=1-\frac{9}{t^2}=\frac{(t+3)(t-3)}{t^2}$$
であるから，$t>2$ における $g(t)$ の増減は次のようになる．

x	(2)	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$\left(\frac{13}{2}\right)$	↘	6	↗

さらに，
$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\infty$$
であるから，$t>2$ における曲線 $y=g(t)$ は次のようになる．



したがって，①が相異なる 4 つの正の解をもつような a の値の範囲は，
$$6<a<\frac{13}{2}.$$