区分求積法

【１】

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+2k}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots\cdots+\sqrt[n]{e^{n-1}}\right)$ を求めよ。

【２】

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{2n-1}{n}}\right\}$ を求めよ。

【３】

正整数 n に対して，数列 $\{a_n\}$ を，$\displaystyle a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}$ で定める。
このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}a_n$ を求めよ。

【４】

任意の自然数に対して，$p_n=\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(2n)!}}$ とおく。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{p_n}$ を求めよ。

【５】 2015 年　数学　日本医科大学　2/2, 1 次　医　（問３削除）

次の極限値を求めよ。

問 1　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{2}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

問 2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}+\cdots+\frac{2}{6n-1}\right)$

【６】2013 東邦大学

n を自然数とし，e を自然対数の底とする。n の関数 $f(n)$ を，

$f(n)=\log_e({}_{2n}C_n)+n\left\{1-\log_e\left(\dfrac{n}{4!}\right)\right\}+\log_e(n!)$ で定める。

$X=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$ とおくとき，$e^X=\boxed{\text{ニヌ}}$ である。

区分求積法 【解答解説】

【１】

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+2k}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots\cdots+\sqrt[n]{e^{n-1}}\right)$ を求めよ。

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+2k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k}{n}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+2x}dx=\frac{1}{2}\Big[\log|1+2x|\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\log 3$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots\cdots+\sqrt[n]{e^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$$

より，関数 $y=e^x$ の区間 $[0,\ 1]$ での定積分である．

$\therefore$ 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 e^x dx=e-1$ ………答

【２】

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{2n-1}{n}}\right\}$を求めよ。

(1)

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2n}{n}}}\right)$$

$$\therefore\quad 与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}}\right)=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$=\Big[\,2\sqrt{1+x}\,\Big]_0^2=2(\sqrt{3}-1)$$

(2)

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^2\sqrt{1+x}\,dx=\cdots=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)$$

【３】

正整数nに対して, 数列$\{a_n\}$を, $a_n=\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}+\dfrac{1}{2n+5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n+(2n-1)}$で定める。

このとき, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}a_n$を求めよ。

$$a_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}$$

$$=\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+(2n-1)}+\frac{1}{2n+2n}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+2n}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n+k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

$$=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{2n}}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$$

$$=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1-\frac{1}{2}\Big[\log(1+x)\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\log 2$$ ………答

【４】

任意の自然数に対して，$p_n=\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{(2n)!}}$ とおく。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{n}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{p_n}$ を求めよ。

(1) $\displaystyle\log\frac{P_n}{n}=\log P_n-\log n=\frac{1}{n}\log\frac{(3n)!}{(2n)!}-\log n$

$\displaystyle=\frac{1}{n}[\log\{3n(3n-1)\cdots\cdots(2n+1)\}-n\log n]$

$\displaystyle=\frac{1}{n}[\log\{(2n+1)(2n+2)\cdots\cdots(2n+n)\}-n\log n]$

$\displaystyle=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log(2n+k)-\log n\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(2+\frac{k}{n}\right)$

$\displaystyle\therefore\ \lim_{n\to\infty}\log\frac{P_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(2+\frac{k}{n}\right)$

$\displaystyle=\int_0^1\log(2+x)dx=\int_2^3\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_2^3$

$\displaystyle=3\log3-3-(2\log2-2)\ =\log\frac{27}{4e}$

よって，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{n}=\frac{27}{4e}$　……(答)

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{P_n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}^{\frac{P_n}{n}}$

$\displaystyle=(e^2)^{\frac{27}{4e}}=e^{\frac{27}{2e}}$　……(答)

【５】　2015 年　数学　日本医科大学　2/2, 1 次　医

次の極限値を求めよ。

問 1　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{2}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

問 2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}+\cdots+\frac{2}{6n-1}\right)$

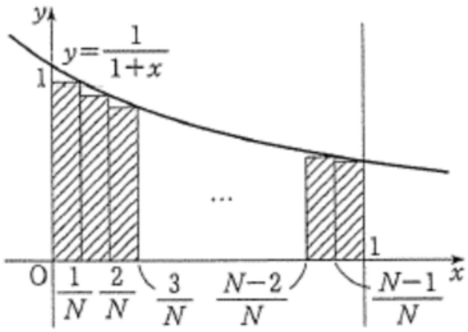
問 3　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\left\{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{n\pi}{n}}\left(1+\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+1)\pi}{n}}\left(1+\sin\frac{(n+2)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+2)\pi}{n}}\cdots\right.\right.$

$\displaystyle\left.\left.\cdots(1+\sin\pi)^{\sin 2\pi}\right\}^{\frac{1}{n}}\right)$

解答　問 1．

$$与式=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{2}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{2n}{2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{2n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n}{2n}}\right)$$



ここで，$2n=N$ とおくと

$$与式=\lim_{N\to\infty}2\cdot\frac{1}{N}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{N}}+\frac{1}{1+\frac{2}{N}}+\frac{1}{1+\frac{3}{N}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{N}{N}}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}2\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1+\frac{k}{N}}$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=2\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=2\log 2 \quad \cdots\cdots(答)$$

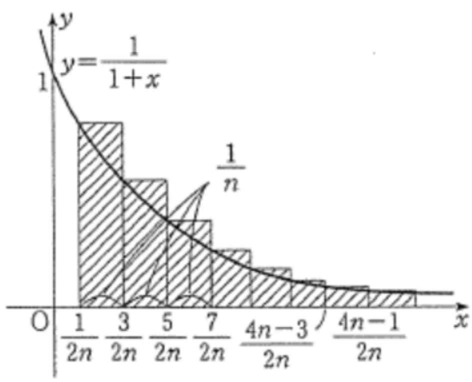
問２．$$与式=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{4n-1}{2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{4n-1}{2n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{2k-1}{2n}}$$

$$=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log|x+1|\Big]_0^2$$

$$=\log 3 \quad \cdots\cdots(答)$$



$\boxed{\text{参考}}$ 与式$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+\frac{2k-1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{4n}\frac{1}{n+\frac{i}{2}}-\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{n+\frac{2j}{2}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{4n}\frac{1}{1+\frac{i}{2n}}-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{j}{n}}\right)$$

$$=2\int_0^2\frac{1}{1+x}dx-\int_0^2\frac{1}{1+x}dx=\int_0^2\frac{1}{1+x}dx$$

問 3．与式の k 番目の項は $a_k=\left(1+\sin\dfrac{(n+k-1)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{(n+k-1)\pi}{n}}$ とおける。

$(k=1,\ 2,\ \cdots)$

$$P_n=\left\{\left(1+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{n}{n}\pi}\cdot\left(1+\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{n+1}{n}\pi}\cdot\ \cdots\right.$$

$$\left.\cdot\left(1+\sin\frac{(n+n)\pi}{2n}\right)^{\sin\frac{n+n}{n}\pi}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

とおくと，$P_n=(a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{n}}$ となり

$$\log P_n=\log(a_1\cdot a_2\cdot\ \cdots\ \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}(\log a_1+\log a_2+\cdots+\log a_{n+1})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}\log a_k$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}\sin\frac{(n+k-1)\pi}{n}\cdot\log\left(1+\sin\frac{(n+k-1)\pi}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{(n+k)\pi}{n}\cdot\log\left(1+\sin\frac{(n+k)\pi}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\pi+\frac{k}{n}\pi\right)\log\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k}{2n}\pi\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(-\sin\frac{k}{n}\pi\right)\log\left(1+\cos\frac{k}{2n}\pi\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-\sin\frac{k}{n}\pi\right)\log\left(1+\cos\frac{k}{2n}\pi\right)\quad(\because\quad \sin 0=0)$$

$$=\int_0^1(-\sin\pi x)\log\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\cos\pi x\log\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1$$

$$-\int_0^1\frac{1}{\pi}\cos\pi x\frac{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\log 2-\int_0^1\frac{1}{\pi}\cos\pi x\frac{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx$$

ここで，$t=\cos\frac{\pi}{2}x$ とおくと　$\frac{dt}{dx}=-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow 0$

また　$\cos\pi x=2\cos^2\frac{\pi}{2}x-1=2t^2-1$

であるから

$$\int_0^1\frac{1}{\pi}\cos\pi x\frac{-\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}dx=\int_1^0\frac{1}{\pi}(2t^2-1)\frac{dt}{1+t}$$

$$=\int_1^0\frac{1}{\pi}\left(2t-2+\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{1}{\pi}\Big[t^2-2t+\log|t+1|\Big]_1^0$$

$$=\frac{1}{\pi}(-1+2-\log 2)=\frac{1}{\pi}(1-\log 2)$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\log P_n=-\frac{1}{\pi}\log 2-\frac{1}{\pi}(1-\log 2)=-\frac{1}{\pi}$$

$$=\log e^{-\frac{1}{\pi}}$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}P_n=e^{-\frac{1}{\pi}}$　……(答)

【６】

$$f(n)=\log_e\frac{(2n)!}{n!n!}+\log_e n!-\log_e n^n+n(1+\log_e 4!)$$

$$=\log_e\frac{(2n)!}{n^n n!}+n(1+\log_e 4!)$$

両辺を n で割って

$$\frac{f(n)}{n}=\frac{1}{n}\log_e\frac{(2n)!}{n^n n!}+1+\log_e 4!$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_e\frac{(2n)!}{n^n n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_e\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log_e\frac{n+1}{n}+\log_e\frac{n+2}{n}+\log_e\frac{n+3}{n}+\cdots+\log_e\frac{n+n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log_e\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\log_e(1+x)\,dx$$

$$=\Big[(1+x)\log_e(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1 dx$$

$$=2\log_e 2-1$$

よって

$$X=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\log_e\frac{(2n)!}{n^n n!}+1+\log_e 4!\right\}$$

$$=2\log_e 2-1+1+\log_e 4!$$

$$=\log_e 96$$

ゆえに　　$e^X=96$