二項定理

$\boxed{{}_n\mathrm{C}_k \text{の性質}}$

① ${}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k}$　対称性＝捨てる神あれば拾う神あり

② ${}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_k + {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$　特定のものが含まれるかどうか

③ $k\cdot {}_n\mathrm{C}_k = n\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$　リーダー付きコンビネーション

$\boxed{{}_n\mathrm{C}_k \text{の和}}$

① ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$

${}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + (-1)^{n-1}\,{}_n\mathrm{C}_{n-1} + (-1)^n\,{}_n\mathrm{C}_n = 0$

② ${}_{2n}\mathrm{C}_0 + {}_{2n}\mathrm{C}_2 + {}_{2n}\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n} = 2^{2n-1}$

${}_{2n}\mathrm{C}_1 + {}_{2n}\mathrm{C}_3 + {}_{2n}\mathrm{C}_5 + \cdots + {}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1} = 2^{2n-1}$

③ $1\cdot {}_n\mathrm{C}_1 + 2\cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3\cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + n\cdot {}_n\mathrm{C}_n = n\cdot 2^{n-1}$　←微分型

$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_0}{1} + \dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2} + \dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{3} + \cdots + \dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$　←積分型

整数問題・二項定理

Type Ⅰ　整数解を求める（数える）問題

基本は(整数)×(整数)＝(整数)の形にして絞る。

【例題 01】　$x+y=3$ を満たす整数の組$(x,\ y)$は何組あるか？
① 2組　②4組　③その他

【例題 02】　$xy=7$ を満たす整数の組$(x,\ y)$は何組あるか？
① 2組　②4組　③その他

【例題 03】　$x^2-y^2=108$ の自然数解をすべて求めよ.

さまざまな方法で、変域を絞る。
① 大小・符号
② 偶奇など
③ 直線型なら１解発見して引き算
④ ２次式なら判別式で絞る
⑤ 分数式に変形して絞る
⑥ 素数＝１×自身
⑦ ３文字以上⇒最大のものにそろえて絞る

《補足》

Type Ⅰ　数え上げる問題（集合・論理）⇒「場合の数」で学習する

Type Ⅲ　約数・倍数問題

整数問題チェック問題

【例題 04】　$xy+2x-y-4=0$ を満たす整数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。

【例題 05】　整数x, yが$29x-7y=1$を満たすとき，x, yの値をすべて求めよ

【例題 06】　nは自然数，pは素数であるとする。$n^3+1=p$を満たすn, pをすべて求めよ。

【例題 07】　自然数m, nが$m^2-2mn+3n^2=12$を満たすとき，m, nの値を求めよ。

【例題 08】　関係式$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$　$(x\leq y\leq z)$を満たす自然数の組(x, y, z)の組をすべて求めよ。

【例題 09】　nを整数とする。n^2+1が$3n+1$の倍数になるnを求めよ。

【例題 10】　$\sqrt{3}$が無理数であることを証明せよ。

【例題 11】　$x+2y+3z=15$ を満たす自然数の組(x, y, z)は何組あるか.

n 進法

$0, 1, 2, \cdots, n-1$ を用いて数字を表す方法。

つまり，値に n が出てくると，次の位にくり上がる。

n 進法

$$a\ b\ c\ .\ d\ e \quad [n]$$

a	b	c	d	e
↑	↑	↑	↑	↑
n^2 の位	n^1 の位	n^0 の位	n^{-1} の位	n^{-2} の位

$\Rightarrow \quad abc.de_{[n]} = n^2 \times a + n^1 \times b + n^0 \times c + n^{-1} \times d + n^{-2} \times e$

ただし，a, b, c, d, e は $0, 1, 2, \cdots, n-1$ のいずれか

【例題 12】

(1)　3 進法で 121 と表される数を 10 進法で表せ。

(2)　2 進法で 10.11 と表される数を 10 進法で表せ。

(3)　10 進法で 385 と表される数を 6 進法で表せ。

(4)　10 進法の 13.375 を 2 進法で表せ。

整数の性質

[用語]

約数・倍数　２つの整数a, bについて，ある整数kを用いて$a=kb$と表せるとき，bをaの約数，aをbの倍数であるという。

素数　１とその数以外に正の約数を持たないような，２以上の自然数
（注）１は素数ではない

素因数分解　自然数を素数だけの積の形に表すこと
自然数nが$n=p^a q^b r^c$と素因数分解されているとき，
nの正の約数の個数は$(a+1)(b+1)(c+1)$

最大公約数　２つ以上の整数に共通な約数（公約数）のうち最大のもの(Greatest Common Measure)

最小公倍数　２つ以上の整数に共通な倍数（公倍数）のうち最小のもの（Least Common Multiple）

互いに素　２つの整数a, bの最大公約数が１であるときをいう

最大公約数・最小公倍数の性質

２つの自然数A, Bの最大公約数をG，最小公倍数をLとする。
$A=aG$，$B=bG$と表せる。このとき，
⑫a, bは互いに素
②$L=abG$
③$AB=GL$

オイラー関数

【例題 13】

540 以下の自然数のうち，2 でも 3 でも割り切れないものは何個あるか。

また，540 との最大公約数が 1 であるものは何個あるか。

【例題 14】

自然数 n と互いに素であって n を超えない自然数の個数を $\varphi(n)$ で表す。p, q を異なる 2 つの素数とするとき，$\varphi(pq)$ の値を求めよ。

合同式

[記号]　m：自然数，a, b：整数とする。

$a \equiv b \pmod{m} \overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} a-b$ が m の倍数

（a と b は m を法として合同であるという）

<u>合同式の性質</u>

$a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$ のとき，

⑫　$a+c \equiv b+d \pmod{m}$

②　$a-c \equiv b-d \pmod{m}$

③　$ac \equiv bd \pmod{m}$

④　自然数 n に対し，$a^n \equiv b^n \pmod{m}$

【例題 15】2014 東邦・医

104^{12} を 98 で割ったときの余りを求めよ。

【補充問題】YAWARAKAより
二項定理篇

標準問題

⑫3-標-1

n を正の整数とする。$\left(4x^3-\dfrac{1}{2x^2}\right)^n$ を展開したとき，定数項が存在するような最小の n に対し，その定数項を求めよ。

⑫3-標-2

k を実数とする。$\left(1+x+kx^2\right)^6$ を展開したときの x^4 の係数を最小にする k の値を求めよ。

⑫3-標-3

n を自然数とするとき，次の式を簡単にせよ。

(1) ${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_4+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}$

(2) ${}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

⑫3-標-4

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log_2\left({}_{99}\mathrm{C}_0+{}_{99}\mathrm{C}_1+{}_{99}\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_{99}\mathrm{C}_{49}\right)$ の値を求めよ。

(2) ${}_n\mathrm{C}_0{}^2+{}_n\mathrm{C}_1{}^2+{}_n\mathrm{C}_2{}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_2{}^2={}_{2n}\mathrm{C}_n$ を証明せよ。

⑫**3-標-5**

n を自然数とするとき，次の式を簡単にせよ。

（1）$1\cdot {}_n\mathrm{C}_1+2\cdot {}_n\mathrm{C}_2+3\cdot {}_n\mathrm{C}_3+\cdots\cdots+n\cdot {}_n\mathrm{C}_n$

（2）$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_0}{1}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{3}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_3}{4}+\cdots\cdots+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1}$

発展問題

⑫**3-発-1**

（1）n を素数とするとき，${}_n\mathrm{C}_k\ \left(k=1, 2, 3, \cdots, n-1\right)$ はいずれも n で割り切れることを示せ。

（2）n を自然数，p を素数とするとき，n^p-n が p の倍数であることを示せ。

⑫**3-発-2**

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot {}_n\mathrm{C}_k$ を n の式で表せ。

整数問題篇

標準問題

⑫3-標-6

次の式を満たす整数 x，y の組を求めよ．

(1) $6x+7y=9$

(2) $31x+500y=1$

⑫3-標-7

次の各式を満たす整数の組をそれぞれについて求めよ

(1) $xy-2x-3y=1$

(2) $5xy-3x-4y=1$

⑫3-標-8

n は自然数とする．$\sqrt{n^2+18n+9}$ が整数となる n をすべて求めよ．

⑫3-標-9

n は自然数する．n^2+13 を $3n+1$ で割ると 6 余るとする．このとき，自然数 n をすべて求めよ．

⑫**3-標-10**

次の式を満たす自然数の組を求めよ．

$$x^2+2y^2+z^2+2xy-yz-zx=8$$

⑫**3-標-11**

次の式を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ は何通りあるか．

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{2}$$

⑫**3-標-12**

$p=n^4+4$ とおく．p が素数となるような自然数 n を求めよ．

⑫**3-標-13**

(1) $\sqrt{3}$ は有理数でないことを示せ．

(2) 自然数 $a,\ b,\ c$ が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとする．$a,\ b$ のうち少なくとも一方は偶数であることを証明せよ．

発展問題

⑫**3**-発-**3**

(1) $\log_2 5$ は無理数であることを証明せよ。

(2) $p \geq 2, q \geq 1$ なる整数 p, q に対して，$\{\log_p(p+1)\}^{q+1}$ は無理数であることを証明せよ。

⑫**3**-発-**4**

正の整数Nを６進法，９進法で表せば，それぞれ３けたの数，abc，cab になるという。Nを10進法で表せ。

⑫**3**-発-**5**

(1)　$m^2=2^n+1$ をみたす正の整数 m，n の組のすべてを求めよ。

(2)　$n^3-m^2n+m^2=0$ をみたす整数 m，n の組のすべてを求めよ。

⑫**3-**発**-6**

a, b, c は $1 < a < b < c$ を満たす整数とし，$(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ は abc で割り切れるとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$ab+bc+ca-1$ は abc で割り切れることを示せ。

(2)　a, b, c をすべて求めよ。

⑫**3-**発**-7**

3 以上の自然数 n に対して方程式

$$x^n + 2y^n = 4z^n \quad \cdots (※)$$

を考える．(※) を満たす整数 x，y，z は $x = y = z = 0$ のみであることを示せ．

⑫**3-**発**-8**

$N = 100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99 \times 100$ とする．

(1) N の末尾には 0 がいくつ並ぶか．

(2) N の桁数は 100 桁より多く，200 桁以下であることを示せ．

SoyPaste 数と式，整数問題（数学ⅠAⅡ）

SP⑫3-1(r13-1) ○

次の２つの方程式を満たす x と y を求めよ．

$$(x-1)(y-1)=9, \quad x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}=1$$

SP⑫3-2 (j37-2) ○

１から８までの８個の異なる自然数を２つのグループに分け，各々のグループに属する数の総和をそれぞれ S_1，S_2 とする．このとき，積 S_1S_2 の最大値は (　　) である．

SP⑫3-3(j33-4) ○

３次方程式 $x^3+(2a-1)x^2+4x-2a-4=0$ の３つの解がすべて整数となるような定数 a の値を求めよ．

SP⑫3-4 (j4-2) ○

３次方程式

$$x^3+nx^2+(n-6)x-2=0 \qquad \cdots (*)$$

が自然数の解をもつような自然数 n の値を求めよ．さらに，このときの $(*)$ の解を求めよ．

SP⑫3-5 (r6-2) ○

n を３以上の整数とする．${}_{n-1}\mathrm{P}_2+{}_n\mathrm{C}_2 \geqq 77$ を満足する n のうち最小のものは (　　) である．

SP⑫3-6 (r12-1) ○

次の問に答えよ．

(1) $(1+x)^{2n}$ を展開したとき，次数が奇数である項の係数の和を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(2) $\left(1+x-\dfrac{2}{x^2}\right)^7$ の展開式における定数項を求めよ．

SP⑫3-7 (r8-1)　○

(1)　$a^2-b^2=217$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(2)　$20!=2^m k$ (k は奇数) が成り立つとき，整数 m の値を求めよ．

SP⑫3-8 (s8-3)

(1)　$6(x-y)=xy$ を満たす自然数の組 $x,\ y$ をすべて求めよ．

(2)　$7(x+y+z)=2(xy+yz+zx)$ を満たす自然数の組 $x,\ y,\ z$ $(x \leqq y \leqq z)$ をすべて求めよ．

SP⑫3-9 (j6-2)

(1)　$25m+17n=1623$ を満たす整数の組 $(m,\ n)$ を 1 つ求めよ．

(2)　$25m+17n=1623$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

SP⑫3-10(j9-1)　○

$\dfrac{2n-2}{n^2+2n+2}$ が整数となるような整数 n をすべて求めよ．

SP⑫3-11 (j32-2)

自然数 n は，2 つの異なる素数の積に等しく，n のすべての正の約数の和が，その素数の和の 4 倍に等しいという．このとき，自然数 n は (　　) である．

SP⑫3-12 (j41-4)

$\dfrac{2n^3+n^2+10n+6}{n^2+3}$ が整数となるような整数 n をすべて求めよ．

SP⑫3-13 (j34-3)

x，y を自然数とする．

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ．

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

SP⑫3-14 (j20-2)

不等式

$$2\sqrt{n+35} \leqq \sqrt{n}+\sqrt{n+100} \leqq 2\sqrt{n+45}$$

を満たす正の整数 n は全部で (　　) 個ある．

SP⑫3-15 (j10-4)　○

二桁の自然数で，正の約数をもっとも多くもつものをすべて挙げよ．

SP⑫3-16 (j10-5)

m は正の整数とする．2 つの整数 a，b について $a-b$ が m の倍数であるとき，a と b は m を**法として合同である**といい，式で

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す．このような式を**合同式**という．

a と b が m を法として合同であるということと，a を m で割った余りと b を m で割った余りが等しいということは同値である．

(1) 0 以上 6 以下の整数のうちいずれか 1 つを次の $\boxed{}$ に入れよ．

(i) $27 \equiv \boxed{} \pmod{7}$　　(ii) $3^4 \equiv \boxed{} \pmod{7}$

(2) 今日は金曜日である．

(i) 10^6 日後は何曜日か．

(ii) 10^{100} 日後は何曜日か．

(iii) 3^{100} 日後は何曜日か．

SP⑫3-17 (s10-4)

正の整数の下二桁とは，百の位以上を無視した数をいう．例えば 2000，12345 の下二桁はそれぞれ 0，45 である．m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下二桁として現れる数をすべて求めよ．

SP⑫3-18 (j25-1)

l，m，n を正の整数として，$2^l 3^m 5^n$ の正の約数の個数を N とする．

$l+m+n=9$ のとき，N の最大値を求めよ．

SP⑫3-19 (s23-3)

次の問に答えよ．

(1) $a^2+3b^2=2c^2$ を満たす整数 a，b，c は，$a=b=c=0$ に限ることを示せ．

(2) 実数 x，y が $x^2+3y^2=2$ を満たすとき，x と y の少なくとも一方は無理数であることを示せ．

SP⑫3-20 (j5-5)

m，n $(m<n)$ を自然数とし，

$$a=n^2-m^2, \qquad b=2mn, \qquad c=n^2+m^2$$

とする．3 辺の長さが a，b，c である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする．

(1) $a^2+b^2=c^2$ を示せ．

(2) r を m，n を用いて表せ．

(3) r が素数のときに，S を r を用いて表せ．

(4) r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ．

SP⑫3-21 (j6-1)

0 でない実数 x，y，z，w と正の整数 a，b，c，d が，

$$a^x=b^y=c^z=d^w, \qquad \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{w}$$

を満たすものとする．ただし，$a>b>c>1$，$d>1$ とする．

(1) a，b，c を用いて d を表せ．

(2) $d \leqq 1000$ かつ $\sqrt{d}$ が整数であるような d を 1 つ求めよ．

SP⑫3-22 (j43-5)

次の問に答えよ．

(1) 5832 の正の約数の個数は $\boxed{\quad (1) \quad}$ である．

(2) 5832 の正の約数の総和は $\boxed{\quad (2) \quad}$ である．

(3) n を自然数とするとき，5832 を底とする n の対数 $\log_{5832} n$ が有理数であり，

$$\frac{1}{2} < \log_{5832} n < 1$$

を満たすとき，n の値は $\boxed{\quad (3) \quad}$ である．

SP⑫3-23 (s6-2)

n を 2 以上の整数とする．n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す．例えば，

$$E(2) = 1, \qquad E(3) = 2, \qquad E(4) = 2, \qquad \cdots, \qquad E(10) = 4, \qquad \cdots$$

である．

(1) $E(1024)$ を求めよ．

(2) $E(2016)$ を求めよ．

(3) m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする．$n = p^m q^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n} \geqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ．

SP⑫3-24 (j30-5)

m を 2015 以下の正の整数とする．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

SP⑫3-25 (s38-1)

自然数 a, b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる．このような a, b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ．

SP⑫3-26 (s44-2)

$a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

SP⑫3-27 (j32-3) ○

m, n は 0 以上 9 以下の異なる整数とする．

循環小数 $0.\dot{m}\dot{n}$ と $0.\dot{n}\dot{m}$ が

$$5\times 0.\dot{m}\dot{n}=0.\dot{n}\dot{m}+\frac{200}{99}$$

を満たすとき，m, n の値を求めよ．

SP⑫3-28 (s34-4) ○

n を自然数とする。

(1) n 以下の非負の整数 k について，関数 $x(1+x)^n$ の導関数の x^k の係数を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_k=(n+1)(n+4)2^{n-2}$ を示せ。