数学Ⅲの極限

$$\frac{1}{\infty}=0,\quad \frac{1}{\pm 0}=\pm\infty$$

$$\infty+\infty=\infty$$

$$\infty\times\infty=\infty$$

lim ではまず，不定形を確認する

（1）　$\dfrac{0}{0}$　⇒　約分，公式，微分の定義

（2）　$\dfrac{\infty}{\infty}$　⇒　次数の比較，指数の底の比較

（3）　$\infty-\infty$　⇒　別の形へ

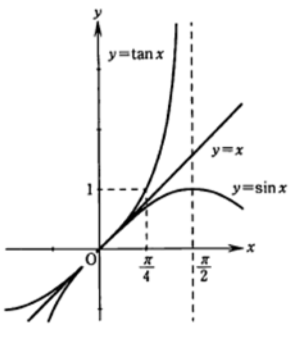
（4）　$0\times\infty$　⇒　別の形へ

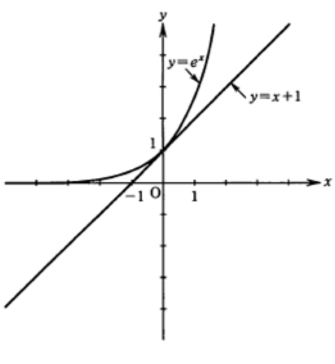
（5）　$(1+0)^{\infty}$　⇒　e の定義へ

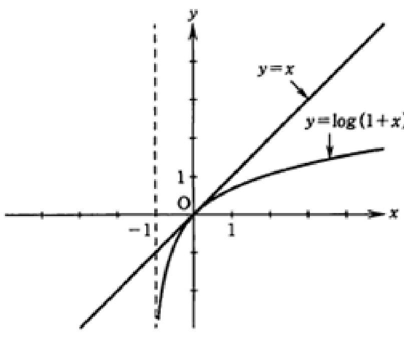
○ $\dfrac{0}{0}$ の極限公式

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\qquad \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1\qquad \boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e\ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$







○不等式＋極限⇒はさみうちの原理

（例）$[x]\leq x<[x]+1$ の利用

○右極限・左極限の区別

○無限級数＝第 n 部分和の極限

○連続，微分可能の定義

$f(x)$ が $x=a$ で連続　⇔　$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a)$

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能　⇔　$\displaystyle\cancel{f'(a)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$　が収束

○微分可能⇒連続

○無限大のオーダー

○ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束　$\Rightarrow$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

（対偶）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$　$\Rightarrow$　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

（逆は偽である）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$　$\not\Rightarrow$　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束

【反例】$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots$

○平均値の定理

$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能のとき，

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$，$a < c < b$ となる c が存在する。

○ロピタルの定理（l'Hospital's rule）ベルヌーイの定理（Bernoulli's rule）

$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$　または　$\dfrac{\infty}{\infty}$　のとき，

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

○接線不等式

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin x < x < \tan x$

$e^x \geq x + 1$

$\log x \leq x - 1$

○極限と融合される図形問題

和と差で sin，スキマで tan，「車輪の下」（ヘルマン・ヘッセ）

極限と命題

【例題 01】

次の命題が真であるか偽であるかをいえ。ただし，真のときは証明し，偽のときは反例をあげよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

(2) 数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

【例題 02】

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，次の命題の真偽をいえ。ただし，真のときは証明し，偽のときは反例をあげよ。

(1) $\{a_n+b_n\}$ と $\{a_n\}$ が収束するならば，$\{b_n\}$ も収束する

(2) $\{a_n{}^2\}$ が収束するならば，$\{a_n\}$ も収束する

談話室マロニエ　数学 QUIZ　極限

A 問題

lim ではまず，不定形を確認する

（1）　$\dfrac{0}{0}$　⇒　ア，イ，ウ

（2）　$\dfrac{\infty}{\infty}$　⇒　エ，オ（無限大のオーダー）

（3）　$\infty-\infty$　⇒　別の形へ

（4）　$0\times\infty$　⇒　別の形へ

（5）　$(1+0)^{\infty}$　⇒　カへ

$\dfrac{0}{0}$型，$(1+0)^{\infty}$型の極限公式をすべて挙げよ。（また，その関連性を考えてみよ）

キ　　　ク　　　ケ

コ　　　サ　　　シ ⇔ ス

微分係数の定義，導関数の定義を述べよ。　セ

不等式＋極限⇒　ソ　　（例）$[x] \leqq x < [x] + 1$ の利用

右極限・左極限の区別

無限級数＝　タ　の　チ　　とくに無限等比級数なら公式がある。これを述べよ。　ツ

連続，微分可能の定義

$f(x)$ が $x = a$ で連続　⇔　テ

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能　⇔　ト

微分可能⇒連続　これを証明せよ。　ナ

無限大のオーダー　ニ

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

（対偶）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

（逆は偽である）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束

これの反例を挙げよ。$\boxed{\text{ヌ}}$

$\boxed{\text{平均値の定理}}$

$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能のとき，

$\boxed{\text{ネ}}$ となる c が存在する。

$\boxed{\text{ロピタルの定理}}$（l'Hospital's rule）

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ または $\dfrac{\infty}{\infty}$ のとき，

$\boxed{\text{ノ}}$

$\boxed{\text{接線不等式}}$

$\boxed{\text{ハ}}$，$\boxed{\text{マ}}$，$\boxed{\text{ヤ}}$，

$\boxed{\text{極限と融合される図形問題}}$

<u>和と差で sin</u>，<u>スキマで tan</u>，<u>「車輪の下」（ヘルマン・ヘッセ）</u>

【補充問題】YAWARAKA より
数Ⅲ極限篇

標準問題

③標-2-1

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(3x+1+\sqrt{9x^2+4x+1}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x\left\{\log(x+2)-\log x\right\}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

③標-2-2

次の関係が成立するような定数 a, b, c の値を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty} x\left\{\sqrt{x^2+3x+1}-(ax+b)\right\}=c$$

③標-2-3

次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+x}\right]}{x}$$

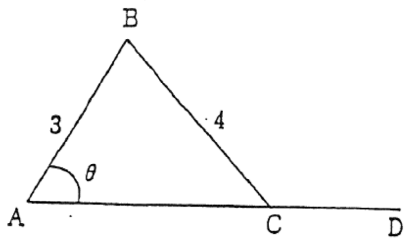
③標-2-4

次の極限の収束・発散を調べよ。

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$$

③標-2-5

右図において，$\mathrm{AB}=3$, $\mathrm{BC}=4$, $\mathrm{AD}=7$ で，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさ θ が変化するにしたがって点 C は AD 上を動く。$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\mathrm{CD}}{\theta^2}$ を求めよ。



③標-2-6

面積 1 の正 n 角形 $(n\geqq3)$ の周の長さを $L(n)$ とする。$L(n)$ を n の式で表し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L(n)$ を求めよ。

③標-2-7

次の関数 $y=f(x)$ のグラフをかき，その連続性を調べよ。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x+1}{x^{n-1}+1}$$

③標-2-8

$\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ がすべての x で連続であるとき，a, b の値を求めよ。

③標-2-9

無限級数$x+x\left(x^2-x+1\right)+x\left(x^2-x+1\right)^2+\cdots\cdots+x\left(x^2-x+1\right)^{n-1}+\cdots\cdots$ が収束するようなxの値の範囲を求めよ。さらに，この級数の和を$f(x)$とするとき，$f(x)$のとり得る値の範囲を求めよ。

③標-2-10

xy平面に直線$l: y=(\tan 2\theta)x$がある。ただし$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$とする。点$(1,\ 0)$を通りx軸とlに接する円をC_1，C_1の左側にあってlとx軸とC_1に接する円をC_2，C_2の左側にあってlとx軸とC_2に接する円をC_3，以下同様に，C_kの左側にあってlとx軸とC_kに接する円をC_{k+1}とする。円C_kの面積をS_kとするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}S_k$を求めよ。

③標-2-11

関数$f(x)$の$x=a$における微分係数$f'(a)$が存在するとき，次の極限値を求めよ。ただし，nは正の整数とし，$a \neq 0$とする。

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n f(x)-a^n f(a)}{x^n-a^n}$$

③標-2-12

関数$f(x)$を$f(x)=\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{2}-x\sin\dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$と定義する。

（1）$f'(x)$を求めよ。

（2）$f'(x)$の連続性を求めよ。

③$\boxed{\text{標-2-13}}$

関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}\ \ (x>0)$ に対して，漸化式

$$a_1=2,\ a_{n+1}=f\left(a_n\right)\ \ (n\geq 1)$$

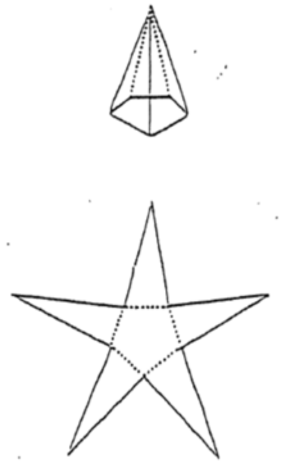
によって，数列 $\left\{a_n\right\}$ を定める。また，方程式 $x=f(x)$ の解を α とする。

（1） $a_n\geq\alpha\ \left(n=1, 2, 3, \cdots\cdots\right)$ を示せ。

（2） $a_{n+1}-\alpha\leq\dfrac{1}{2}\left(a_n-\alpha\right)\ \ \left(n=1, 2, 3, \cdots\cdots\right)$ を示せ。

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

発展問題



③発-2-1

$n \geq 3$ とし，正 n 角すいの表面を，底面に含まれない n 個の辺で切り開いて得られる展開図を考える。正 n 角すいの頂点は，展開図においては，異なる n 個の点になっている。ここでは，これらの n 個の点を通る円の半径が 1 であるような，正 n 角すいのみを考えることにする。

(1)　各 n に対して，このような正 n 角すいの体積の最大値 v_n を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} v_n$ を求めよ。

（注）図は，$n=5$ の場合の正 n 角すいとその展開図の例である。

③発-2-2　FG

n を自然数とする。半径 $\dfrac{1}{n}$ の円を互いに重なり合わないように半径 1 の円に外接させる。このとき，外接する円の最大個数を a_n とする。$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$ を求めよ。

③発-2-3

$OA_1 = OB = 1$, $\angle B_1OA_1 = \theta$ $(0 < \theta < \pi)$ であるような二等辺三角形 $O_1A_1B_1$ がある。

辺 A_1B_1 の中点を B_2 とし，辺 OA_1 上に $OA_2 = OB_2$ となる点 A_2 をとり，二等辺三角形 OA_2B_2 をつくる。以下同様にして，$n > 2$ についても二等辺三角形 OA_nB_n を作っていく。

辺 OA_n の長さを a_n とおく。

(1)　$a_3 \cdot \sin\dfrac{\theta}{4}$ を計算せよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を計算せよ。

③$\boxed{\text{発-2-4}}$

半径１の円に内接する$3n$個の半径の等しい円を図１のように描く。さらに図２のように$3n$個の小さな半径の等しい円を描く。この操作を無限に繰り返したとき，$3n$個ずつ次々に描かれる円の面積の総和S_nと，それらの円の円周の長さを総和C_nを求めよ。ただし，$n \geq 2$とする。

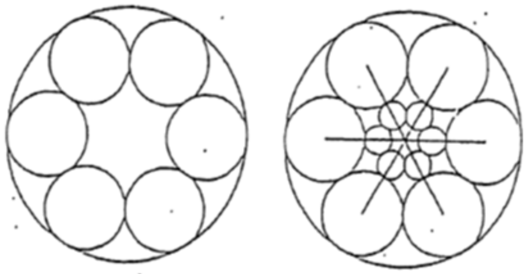


図1　　図2

③$\boxed{\text{発-2-5}}$

$-\pi \leq x \leq \pi$ のとき，無限級数

$$\sin^2 x + \sin^2 x \cos^3 x + \sin^2 x \cos^6 x + \cdots\cdots + \sin^2 x \cos^{3(n-1)} x + \cdots\cdots$$

の和を$f(x)$とする。

$f(x)$の増減を調べ，$y = f(x)$のグラフを描け。

③$\boxed{\text{発-2-6}}$

関数$f(x) = \displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n-1}a + bx - cx^n}{1 + 3^{n-1} + x^{n-1}}$は実数全体で定義され，かつ$f(-3) = 3$である。ただし，$n$は自然数とする。

(1)　a, b, cの値を求めよ。

(2)　関数$y = f(x)$のグラフをかけ。

③発-2-7 演習添削

２つの級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ がそれぞれ和 A, B を持つとき，次の問いに答えよ。ただし，$a_1 = 1$ とする。

(1)　$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n + a_{n+1}\right)$ を A, B で表せ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2\left(a_n - a_{n+1}\right)$ を A, B で表せ。

③発-2-8

$f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi\cos x$ について次の問いに答えよ.

(1) $x = f(x)$ はただ１つの解を持つことを示せ.

(2) 数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = 0$，$x_{n+1} = f(x_n)$（$n \geqq 1$）で定めるとき，$\{x_n\}$ が収束することを示し $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ

③$\boxed{\text{発-2-9}}$

すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)$ は第 2 次導関数をもち，つねに $f'(x) \neq 0$ を満たすとする．また，方程式 $f(x)=0$ はただ 1 つの実数解 α をもつとする．

$F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ とおく．

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線と x 軸との交点を $(x_{n+1},\ 0)$ とする．このとき，$x_{n+1} = F(x_n)$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ が成り立つことを示せ.）

(2) すべての実数 x に対して $|f(x)f''(x)| \leqq M\{f'(x)\}^2$ を満たす定数 M（$M \geqq 0$）が存在するとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqq M|x-\alpha| \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(3) 定数 M が 1 より小さいとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ となることを示せ．

SoyPaste 極限（数学Ⅲ）中心

SP③2-1 (j2-3)　○

一辺の長さが $\sqrt{n}$ の正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ における三角形 $A_1A_2A_3$ の面積を S_n とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

SP③2-2 (s2-1)

n を自然数とする．

(1)　$0<x<2\pi$ のとき，

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\dfrac{n+1}{2}x\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

を示せ．

(2)　$n\geqq 3$ とする．中心 O，半径 r の円周上に n 個の点 P_1，P_2，P_3，$\cdots$，$P_n=P_0$ が順番に並んでおり，$\angle P_kOP_{k-1}=k\angle P_1OP_0$ ($k=1$，2，3，$\cdots$，n) を満たしているものとする．このとき，多角形 $P_1P_2P_3\cdots P_n$ の面積 S_n を求めよ．

(3)　$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

SP③2-3 (j17-5) ○

点Oを中心とし，半径をrとする円周上に2点A，Bをとり，劣弧ABおよび弦ABの中点をそれぞれPおよびQとする．$\angle \mathrm{AOB} = \theta$，三角形AOBおよび扇形OABの面積をそれぞれ$S_1$および$S_2$とし，劣弧AB，弦ABおよび線分PQの長さをそれぞれ$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{AB}}$，$\overline{\mathrm{PQ}}$で表す．ただし，劣弧ABとは，2点A，Bを両端とする2つの円弧のうち，長さの短い方をさす．

(1)　次のそれぞれを，rおよびθを用いて表せ．

(i)　$S_1 = \boxed{\textbf{(1)}}$　　(ii)　$S_2 = \boxed{\textbf{(2)}}$

(iii)　$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \boxed{\textbf{(3)}}$　　(iv)　$\overline{\mathrm{AB}} = \boxed{\textbf{(4)}}$

(2)　次の極限値を求めよ．

(i)　$\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{S_1}{S_2} = \boxed{\textbf{(5)}}$　　(ii)　$\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \boxed{\textbf{(6)}}$

(iii)　$\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}^2} = \boxed{\textbf{(7)}}$

SP③2-4 (r20-1)　○

条件 $a_1=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{2}{n(n+1)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ の値を求めよ．

SP③2-5 (j20-3)　☆

関係式

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=1+\frac{1}{na_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2(a_{n+1}-a_n)$ の値を求めよ．

SP③2-6 (r25-1)　○

n を自然数とするとき，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\log\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{2}{4+n^2}+\frac{3}{9+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n}{2n^2+3nk+k^2}$

SP③2-7 (j25-4)

自然数 n に対して，n 個の整数 n^2+k^2 ($k=1$，2，3，$\cdots$，n) の積

$$a_n=(n^2+1^2)(n^2+2^2)(n^2+3^2)\cdots(n^2+n^2)$$

を考える．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^2}$ を求めよ．

SP③2-8 (r17-2)　○

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x+2}-2\sqrt{x^2-x+1})$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1-\cos^2 2x)}{x\sin^3 x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+3x)}{\sin x}$