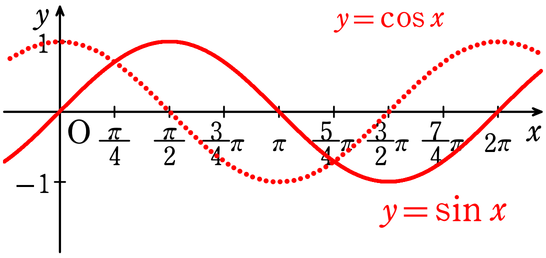
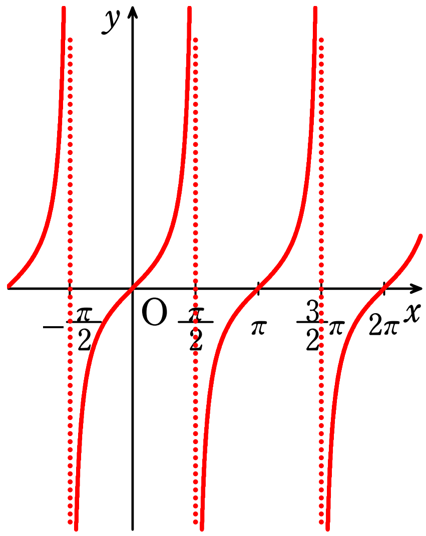
数学Ⅲの関数

基本関数のグラフ

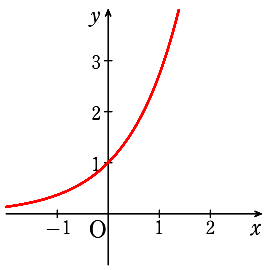
（1）$y=\sin x$,　$y=\cos x$,　$y=\tan x$

周期 2π　周期 2π　周期 π

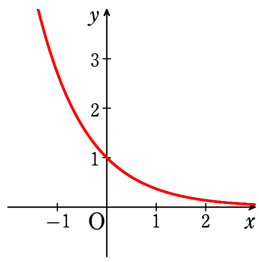




（2）$y=e^{x}$,



$y=e^{-x}$

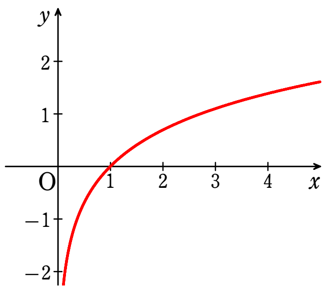


（右端）$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} e^{x}=\infty$　　$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$

（左端）$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0$　　$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=\infty$

漸近線　$y=0$　　漸近線　$y=0$

（3）$y=\log x$



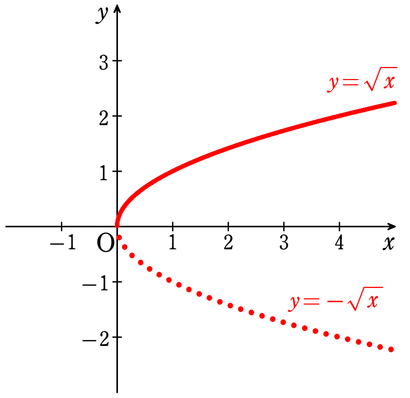
真数条件より　$x>0$　←変域

（右端）$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\log x=\infty$

（左端）$x>0$ だから $x\to 0$ で調べる

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\log x=-\infty$$

（4）$y=\sqrt{x}$，　$y=-\sqrt{x}$



$y^2=x$ ←ヨコ型放物線

$\Leftrightarrow\quad y=\pm\sqrt{x}$

ルート内≥ 0より，$x\geq 0$←変域

$y=\sqrt{x}$ について，

（右端）$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$

（左端）$x\geq 0$ だから $x=0$ を代入するだけ

$x=0$ のとき，$y=0$

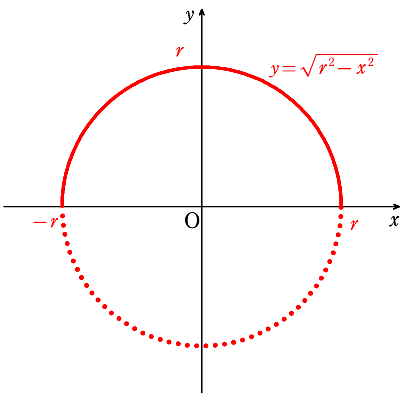
$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$（$x\geq 0$）より，

$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$（$x>0$）←変域変化！

（左端）$\displaystyle\lim_{x\to 0}y'=+\infty$

ルートのグラフでは端点での接線が直立

（5）$y=\sqrt{r^2-x^2}$



$x^2+y^2=r^2$　←円

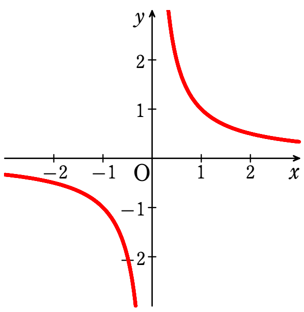
$\Leftrightarrow\quad y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

ルート内≥ 0より，$-r\leq x\leq r$←変域

（4）と同様に

端点での接線が直立（円だから当然）

（6）$y=\dfrac{1}{x}$



分母$\neq 0$より，$x\neq 0$←変域

$$\lim_{x\to+0}y=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$$

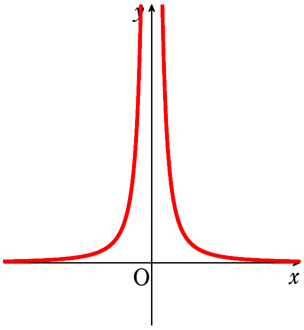
$$\lim_{x\to-0}y=\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=+\infty$$

漸近線　$x=0$

（両端）$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$ より，

漸近線　$y=0$

（7）$y=\dfrac{1}{x^2}$



分母$\neq 0$より，$x\neq 0$←変域

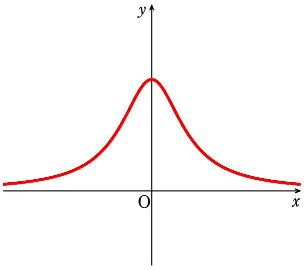
$$\lim_{x\to\pm 0} y=\lim_{x\to\pm 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

漸近線　$x=0$

（両端）$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0$ より，

漸近線　$y=0$

（8）$y=\dfrac{1}{x^2+a^2}$



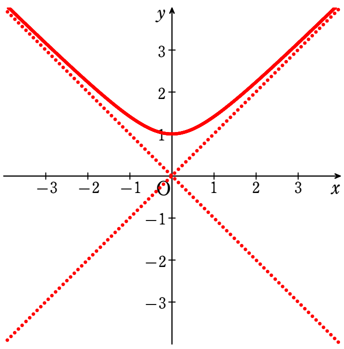
分母>0より，xは全実数

（両端）$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+a^2}=0$ より，

漸近線　$y=0$

《発展》★

（9）$y=\sqrt{x^2+a^2}$



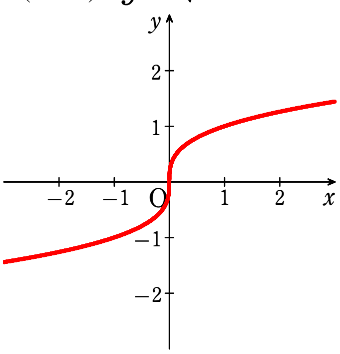
$y^2-x^2=a^2$←タテ型双曲線

$\Leftrightarrow\quad y=\pm\sqrt{x^2+a^2}$

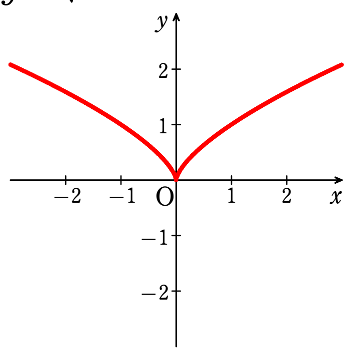
ルート内>0より，xは全実数

（両端）$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} y=\infty$

（１０）$y=\sqrt[3]{x}$



$y=\sqrt[3]{x^2}$



基本関数のグラフの拡張

1）平行移動・対称移動，拡大・縮小

グラフの平行移動・対称移動

$y=f(x)$ のグラフを

x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動
→ $y-q=f(x-p)$

x 軸に関して対称移動 → $-y=f(x)$

y 軸に関して対称移動 → $y=f(-x)$

原点に関して対称移動 → $-y=f(-x)$

2）２乗のグラフ

3）逆数のグラフ

4）和のグラフ　一方（簡単な方）に他方を乗せる（軸上）またはケズる（軸下）

5）積のグラフ　0 となる点，軸との上下，両端に着目

6）合成関数のグラフ

7）逆関数のグラフ

8）勾配関数（発展）

（注）漸近線

分母ゼロ⇒タテ漸近線，極限（両端）⇒ヨコ漸近線，ほぼ１次⇒ナナメ漸近線

【例題 01】

実数 a, b が $0<a<b<1$ を満たすとき $\dfrac{2^a-2a}{a-1}$ と $\dfrac{2^b-2b}{b-1}$ の大小を比較せよ。（04 名古屋）

○合成関数の追跡

【例題 02】$f(x)=|2x-1|\ (0\leq x\leq 1)$ とおく。

(1)　$y=f\left(f(x)\right)$ のグラフを描け

(2)　$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=x$ の解の個数を求めよ。

談話室マロニエ　数学QUIZ　数学Ⅲの関数

基本関数のグラフの拡張

1）平行移動・対称移動，拡大・縮小

$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $+a$，y 軸方向に $+b$ 平行移動したグラフは $\boxed{*}$

$y=f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動すると $\boxed{*}$，y 軸だと $\boxed{*}$

$y=f(x)$ のグラフを x 軸を元にして y 軸方向に k 倍に拡大すると $\boxed{*}$，y 軸だと $\boxed{*}$

2）2乗のグラフ

【例】$y=\sin^2 x\ (0\leq x\leq 2\pi)$　　　$y=(\log x)^2$

3）逆数のグラフ

【例】$y=\dfrac{1}{\sin x}$　　　$y=\dfrac{1}{\log x}$

4）和のグラフ　一方（簡単な方）に他方を乗せる（軸上）またはケズる（軸下）

【例】$y=x-2\sin x\ (0\leq x\leq 2\pi)$

5）積のグラフ　0となる点，軸との上下，両端に着目

【例】$y=xe^{-x}$

6）合成関数のグラフ

【例】$y=\dfrac{1}{x^2+1}$

7）逆関数のグラフ　$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称

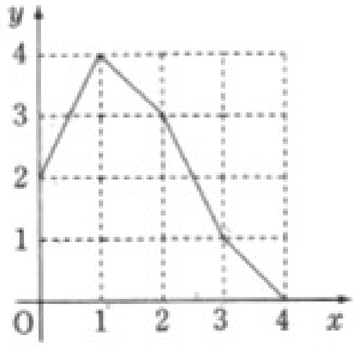
存在条件＝1対1対応

8）勾配関数

【例】$y=\dfrac{\sin x}{x}$

標-1-1

図の折れ線で表される関数を$f(x)$ $(0\leqq x\leqq 4)$とする。この関数の 2 回の合成関数を$f_2(x)=f\left(f(x)\right)$，3 回の合成関数を$f_3(x)=f\left(f_2(x)\right)$とする。



(1) 関数$y=f_2(x)$ $(0\leqq x\leqq 4)$のグラフをかけ

(2) $0\leqq x\leqq 4$において，$f_3(x)+x-4=0$を満たすx はいくつあるか。

標-1-2

関数

$g(x)=x^2+2ax+2$について，方程式$g\left(g(x)\right)=g(x)$が 3 つの異なる実数解をもつような実定数aの値を求めよ。

標-1-3

2 つの関数$\begin{cases} y=-\left(x-[x]\right)^2+[x+1] & \cdots\cdots ① \\ \qquad y=kx & \cdots\cdots ② \end{cases}$

を$x\geq 0$で考える。ここで，$[x]$はxを超えない最大の整数を表す。(ガウス記号)

(1) ①，②のグラフの交点が 1 個であるような実数kの値の範囲を求めよ。

(2) ①，②のグラフの交点がn個$(n\geqq 2)$ であるような実数kの値の範囲を求めよ。

合成関数の練習問題

【１】

方程式 $4^x-2^x=12$ の解は $x=$ ア$\boxed{}$ である。k を定数とするとき，方程式 $4^x-2^x=k$ がただ１つの解をもつのは k の値が $k\geqq$ イ$\boxed{}$ の範囲にあるか，または，$k=$ ウ$\boxed{}$ のときである。また，$k=$ ウ$\boxed{}$ のとき，方程式 $4^x-2^x=k$ の解は $x=$ エ$\boxed{}$ である。

【２】

k を定数とする。関数 $y=4^x+4^{-x}-2k(2^x+2^{-x})+2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　y の最小値を k を用いて表せ。

(2)　r を実数とする。$k=5$ のとき，$y=r$ となるような x の個数が r の値によってどのように変化するか調べよ。

【３】

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲にある θ に対し，$f(\theta)=2(\cos^3\theta-\sin^3\theta)$，$t=\cos\theta-\sin\theta$ とおく。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(3)　実数 k に対して，$f(\theta)=k$ を満たす θ の個数を調べよ。

【4】
定数 a を実数とし，$0 \leqq x \leqq \pi$ とする。
関数 $y=-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2a(\sqrt{3}\sin x-\cos x)+4$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$t=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ とするとき，t の値の範囲を求めよ。

(2)　y を t の式で表せ。

(3)　$0 \leqq y \leqq 6$ が常に成り立つように，a の値の範囲を定めよ。

(4)　方程式 $-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2a(\sqrt{3}\sin x-\cos x)+4=0$ が 3 個以上の異なる実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

【5】
$f(x)=x^2-\dfrac{4}{5}$ とおく。

(1)　2 次方程式 $f(x)=x$ の 2 つの解を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。α，β の値を求めよ。

(2)　(1) の α について，$f(f(\alpha))$ の値を求めよ。

(3)　関数 $f(f(x))$ を求めよ。

(4)　方程式 $f(f(x))=x$ を解け。

2 数学Ⅲの関数　（フジテキ後期テキストより）

2-1 (r2-1) ○

関数 $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$ がある．

(1) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．また，$f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求めよ．

(2) $f(x) = f^{-1}(x)$ を満たす x の値を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$，$y = f^{-1}(x)$ および直線 $x = 2$，$y = 2$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

a，b，c，d を実数とする．2つの関数 $f(x) = a \cdot 3^x + b$，$g(x) = c \log_3 x + d$ と，これらの関数の逆関数 $f^{-1}(x)$，$g^{-1}(x)$ が，

$$f(3) = 49, \quad f^{-1}(13) = 2, \quad g(9) = 1, \quad g^{-1}(5) = 27$$

を満たすものとする．

(1) a，b，c，d の値を求めよ．

(2) $(g \circ f)(1)$ の値を求めよ．

2-2 (j2-4) ○

関数 $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$ がある．

(1) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．また，$f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求めよ．

(2) $f(x) = f^{-1}(x)$ を満たす x の値を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$，$y = f^{-1}(x)$ および直線 $x = 2$，$y = 2$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

2-3 (j27-1) ○

関数 $f(x) = 2x^2 + 2x + 1 \left(x \geqq -\dfrac{1}{2} \right)$ の逆関数を $g(x)$ とする．

このとき，曲線 $y = g(x)$ 上の点と直線 $y = 2x - 1$ の距離の最小値と，その最小値を与える曲線 $y = g(x)$ 上の点をそれぞれ求めよ．

2-4 (j33-5)

(1) 次の関数のグラフを同じ座標平面に描け．

① $y=9 \quad (|x| \leqq 1)$

② $y=-x^2+6|x|+4 \quad (1 \leqq |x| \leqq 6)$

③ $y=2^{\frac{|x|}{3}} \quad (|x| \leqq 6)$

④ $x^2+(y-5)^2=\dfrac{1}{4}$

⑤ $y=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}|x|\right)+\dfrac{9}{2} \quad (2 \leqq |x| \leqq 4)$

⑥ $|y-3|=\sqrt{-\dfrac{|x|}{2}+1}$

2-5 (j33-5)

(2) $-\sqrt{5} \leqq x \leqq \sqrt{5}$ において 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定義する．

$$f(x)=\sqrt{|x|}+\sqrt{5-x^2}$$
$$g(x)=\sqrt{|x|}-\sqrt{5-x^2}$$

このとき，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ を同じ座標平面に描け．

2-6 (j33-5)

(3) 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定義する．

$$f(x)=\begin{cases} x^4-x^2+6 & (|x| \leqq 1) \\ \dfrac{12}{|x|+1} & (|x|>1) \end{cases}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\cos(2\pi x)+\frac{7}{2} \qquad (|x| \leqq 2)$$

このとき，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ を同じ座標平面に描け．