数列

$\boxed{\text{数列}}$＝自然数上で定義された「関数」

等差数列　＝　一般項は一次関数　$a_n = pn + q$

等比数列　＝　一般項は指数関数　$a_n = kr^n$（定数項なし）

$\boxed{\text{数列の和}}$

等差の和（一次の和）　⇒　公式
等比の和（指数の和）　⇒　公式
等差×等比の和（一次×指数の和）　⇒　公比をかけてひきざんする

$\boxed{\text{とびとび・かたまり・逆ならび}}$

等差(等比)数列の項を一定の間隔で取り出したものも等差(等比)数列　＝とびとび
等差(等比)数列の項を一定の個数だけかたまりにして足したものを
並べたものも等差(等比)数列　＝かたまり
等差数列の各項の逆数を並べたものを「調和数列」という
等比数列の各項の逆数を並べたものは「等比数列」のまま

等差(等比)数列の項の順番を逆にしても等差(等比)数列　＝逆ならび

$\boxed{\Sigma\text{計算}}$＝和・差・実数倍はバラせるが，積・商はバラせない

（1）和・差　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_k \pm b_k\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k \pm \sum_{k=1}^{n}b_k$

（2）実数倍　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}l\cdot a_k = l\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$

（3）積　$\displaystyle\xcancel{\sum_{k=1}^{n}\left(\underline{a_k \times b_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k \times \sum_{k=1}^{n}b_k}$

（例）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k+2)\xcancel{=}\sum_{k=1}^{n}(k-1)\times\sum_{k=1}^{n}(k+2)$　とは変形できない。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k-2\right)$　とすればΣ公式が使える。

（4）商　$\displaystyle\xcancel{\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}}$

（例）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\xcancel{=}\frac{\sum_{k=1}^{n}1}{\sum_{k=1}^{n}k(k+1)}$　とは変形できない。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\underline{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)}$　とすればΣ公式は必要ない。

（階差の形に直す！）

※　入試で出題される商のΣは，部分分数分解で階差の形に直せるものがほとんどである。

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(m\text{次式}\right)=\left(m+1\text{次式}\right)}$

①　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

②　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

④　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=n\cdot c$

⑤　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

⑥　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

漸化式

Ｔｙｐｅ１　階差型　$a_{n+1}-a_n=b_n$

《解法》タテに並べてすべて加える

$$
\begin{array}{rl}
 & a_2-a_1=b_1 \\
 & a_3-a_2=b_2 \\
 & a_4-a_3=b_3 \\
 & \vdots \\
+) & a_n-a_{n-1}=b_{n-1} \\
\hline
 & a_2-a_1=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{n-1}
\end{array}
$$

$$\therefore\quad a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \qquad (n\geqq 2)$$

注）教科書では，これを公式として扱っている。

$b_n=a_{n+1}-a_n$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \qquad (n\geqq 2)$$

$\{b_n\}$を$\{a_n\}$の階差数列とよぶ。

注）厳密には，$n=1$のときの場合わけが必要。

Ｔｙｐｅ２　等差型　$a_{n+1}=a_n+d$

$\Rightarrow\quad a_n=a_1+(n-1)\cdot d$

Ｔｙｐｅ３　等比型　$a_{n+1}=r\cdot a_n$

$\Rightarrow\quad a_n=a_1\cdot r^{n-1}$

Ｔｙｐｅ４　等差＆等比型　$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$

$\Rightarrow$　特性方程式（$a_n, a_{n+1}\to\alpha$ とおきかえ）をひきざん

$$
\left(
\begin{array}{rl}
 & a_{n+1}=p\cdot a_n+q \\
-) & \alpha\quad=p\cdot\alpha+q \\
\hline
 & a_{n+1}-\alpha=p\cdot(a_n-\alpha)
\end{array}
\right)
$$

$\Rightarrow\quad a_{n+1}-\alpha=(a_1-\alpha)\cdot p^{n-1}$

$\therefore\quad a_{n+1}=(a_1-\alpha)\cdot p^{n-1}+\alpha$

Ｔｙｐｅ５　分数型（分子単項式）　$a_{n+1}=\dfrac{p\cdot a_n}{q\cdot a_n+r}$

⇒　逆数をとって，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおきかえ

Ｔｙｐｅ６　⊕指数型　$a_{n+1}=p\cdot a_n+r^n$

《解法１》r^{n+1} でわって，$b_n=\dfrac{a_n}{r^n}$ とおきかえ

《解法２》p^{n+1} でわると，$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{r^n}{p^{n+1}}$ は階差型

《解法３》$a_{n+1}-\alpha\cdot r^{n+1}=p\cdot\left(a_n-\alpha\cdot r^n\right)$ の形に変形（係数比較で α を定める）

Ｔｙｐｅ７　積商指数型　$a_{n+1}=(a_n$の積商指数の式$)$

⇒　対数をとって，$b_n=\log a_n$ とおきかえ

（注）底は計算が簡単になるように自由に決める。

Ｔｙｐｅ８　S_n を含む漸化式

⇒

$$\boxed{\begin{array}{l} S_1=a_1 \\ S_n-S_{n-1}=a_n\quad(n\geqq 2) \end{array}}$$

を用いて S_n 消去

（注）$n=1$ のときの場合わけが必要になることがある。

Ｔｙｐｅ９　連立漸化式①係数対称型

⇒ $\begin{cases} a_{n+1}=p\cdot a_n+q\cdot b_n \\ b_{n+1}=q\cdot a_n+p\cdot b_n \end{cases}$　⇒　和と差を作る

Ｔｙｐｅ10　連立漸化式②係数非対称型

誘導があれば誘導に従う。

（１）3 項間漸化式に帰着，（２）$\{a_n+r\cdot b_n\}$ が等比となる r を求める，（３）行列

Ｔｙｐｅ11　三項間漸化式　$a_{n+2}+p\cdot a_{n+1}+q\cdot a_n=0$

特性方程式　$t^2+pt+q=0$ の２解α，βを用いて，

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha\cdot a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha\cdot a_n\right) \\ a_{n+2}-\beta\cdot a_{n+1}=\alpha\left(a_{n+1}-\beta\cdot a_n\right) \end{cases}$$

と変形する。

$\alpha\neq\beta$ なら，漸化式 2 つから a_{n+1} を消去して一般項を得る（漸化式を解かなくてよい）が，

$\alpha=\beta$ なら，漸化式が１つのみで，その漸化式を解かなければならない。

Ｔｙｐｅ12　分数型漸化式(分子単項式でないもの)

$$a_{n+1}=\frac{p\cdot a_n+q}{r\cdot a_n+s}$$

⇒　特性方程式　$t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ の解 $t=\alpha,\beta$ を利用。

$$\begin{cases}\alpha\neq\beta \quad \text{のとき，}\quad b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} \quad \text{とおく。}\\ \alpha=\beta \quad \text{のとき，}\quad b_n=\dfrac{1}{a_n-\alpha} \quad \text{とおく。}\end{cases}$$

Ｔｙｐｅ13　$a_{n+1}=p\cdot a_n+f(n)$ 型

⇒　$a_{n+1}-g(n+1)=p\cdot\left(a_n-g(n)\right)$ の形に変形できるような $g(n)$ をさがす。

（注）Ｔｙｐｅ４，Ｔｙｐｅ６(解法３)の一般化である。

例　$f(n)$ が一次式ならば，$g(n)$ も一次式，つまり $g(n)=qn+r$ などとおけばよい。

Ｔｙｐｅ14　$a_{n+1}=f(n)\cdot a_n$ 型

《解法１》漸化式を繰り返し用いて直接求める。

《解法２》変形して，定数列の漸化式を作る。

数列の基本チェック

【例題 01】　初項 1，公差 3 の等差数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ。

（１）　一般項a_nを求めよ。

（２）　和　$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$を求めよ。

（３）　和　$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{100}$を求めよ。

【例題 02】　等差数列$\{a_n\}$について，初項から第n項までの和をS_nとする。
このとき，$S_{100}=40$，$S_{200}=120$のとき，S_{300}を求めよ。

【例題 03】　初項 1，公比 3 の等比数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ。

（１）　一般項a_nを求めよ。

（２）　和　$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$を求めよ。

（３）　和　$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}$を求めよ。

（４）　和　$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{6n+1}$を求めよ。

【例題 04】　等比数列$\{a_n\}$について，初項から第n項までの和をS_nとする。
このとき，$S_{100}=40$，$S_{200}=120$のとき，S_{300}を求めよ。

【例題 05】　次の計算をせよ。

（１）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{k+1}$

（２）$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}3^{2k+1}$

数列　解答

$\boxed{1}$　（１）　3n-2　（２）　$3n^2-2n$　（３）5083

$\boxed{2}$　240

$\boxed{3}$　（１）　3^{n-1}　（２）　$\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$　（３）　$\frac{1}{8}\left(9^{n+1}-1\right)$　（４）　$\dfrac{1}{26}\left(27^{2n+1}-1\right)$

$\boxed{4}$　280

$\boxed{5}$　（１）　$4\left(2^n-1\right)$　（２）　$\frac{3}{8}\left(9^{n+1}-1\right)$

数列・チェックリスト

○　等差数列は初項，公差ですべてのことがわかる。

○　等差の和は，（初項＋末項）×項数÷２

　　等差の和の公式の証明　＝　順番を逆にして足し算

○　等比数列は初項，公比ですべてのことがわかる。

○　等比の和は，初項と公比と項数で求まる。ただし公比＝１のときは公式が別

　　等比の和の公式の証明　＝　公比をかけて引き算　（かけずらひき）

○　等差中項，等比中項の公式　←　当たり前の公式。なくても大丈夫。

○　シグマ公式・・・証明：Σｋは等差数列，Σｃは定数列，その他は「数学的帰納法」

　　シグマ記号は和の記号，和と差と実数倍はバラせる。

　　　　積はまず展開して和・差・実数倍に直す。

○　シグマで困ったら階差の形に直す

○　商はシグマをばらせない，展開もできない　⇒　商は困る（しょうがない〜♪）

　　（部分分数分解）でやらず，階差の形に直して「検算」が早い

　　一般項に直すときには，一次の係数が公差を表すことを用いると早い

○　「和から一般項の公式」　証明はｎを１減らして引き算

　　★　$n=1$ のときの場合分けが必要だが，$S_0=0$　なら $n\geq 2$ に吸収できる。

○　階差数列の公式は，必ず $n=1$ のときが吸収できる

○　等差はカタマリでも等差

　　（例）10 個のカタマリだと，公差は $100d$ となる

○　等比はカタマリでも等比

　　（例）10 個のカタマリだと，公比は r^{10} となる。

○「隣接整数の積の公式」

⑤　$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

⑥　$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

○　★数列で有効な技術

　　具体化，図・表・グラフで整理，

　　具体例と文字の運用を結びつける，

　　周期性　⇒　カレンダーで整理

○　Σ公式　$\sum_{k=1}^{n} k^l$ は n の $l+1$ 次式で，n^{l+1} の係数は $\frac{1}{l+1}$ で，n^l の係数は $\frac{1}{2}$

○　漸化式を解くときの心は「カタマリを作ること」

【例題 06】　2014　東京医科大学

数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\dfrac{1}{n^5}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める。このとき $\{a_n\}$ は収束し，$\alpha=\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ とすれば

$\alpha=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

さらにこれらの a_n，α を用いて，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=(\alpha-a_n)n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定めれば $\{b_n\}$ も収束し，

$\beta=\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ とすれば $\beta=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

○　2 段階かけずらひき

【例題 07】　数列 $\left\{a_n\right\}$ が初項 1，公比 2 の等比数列であるとき，次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,a_k$　　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2a_k$

（答え）(1) $(n-1)2^n+1$　　(2) $\left(n^2-2n+3\right)2^n-3$

談話室マロニエ　数学QUIZ　数列

A 問題

初項a，公差dの等差数列$\{a_n\}$の一般項a_nは$\boxed{\text{ア}}$

初項から第n項までの和S_nは$\boxed{\text{イ}}$

初項a，公比rの等比数列$\{a_n\}$の一般項a_nは$\boxed{\text{ウ}}$

初項から第n項までの和S_nは$\boxed{\text{エ}}$

ただし，$\boxed{\text{エ}}$は$\boxed{\text{オ}}$のときには成り立たず，そのときは$\boxed{\text{カ}}$と表される。

a, b, cがこの順に等差数列のとき，$\boxed{\text{キ}}$

a, b, cがこの順に等比数列のとき，$\boxed{\text{ク}}$

和S_nが与えられているとき，一般項は$a_1 = \boxed{\text{ケ}}$，$n \geq 2$のときは$a_n = \boxed{\text{コ}}$と表される。

Σ記号

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\text{サ}}$，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\text{シ}}$，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \boxed{\text{ス}}$

$b_n = a_{n+1} - a_n$のとき，$a_n = \boxed{\text{セ}} (n \geq 2)$

B 問題

等差数列の和の公式の証明，ポイントは$\boxed{\text{ソ}}$

等比数列の和の公式の証明，ポイントは$\boxed{\text{タ}}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \boxed{\text{チ}}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \boxed{\text{ツ}}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot r^{k-1} = \boxed{\text{テ}}$

階差数列の公式の証明のポイントは$\boxed{\text{ト}}$

談話室マロニエ　数学 QUIZ　漸化式

A 問題

(1)　$a_{n+1}=a_n+d$　のとき，数列$\{a_n\}$は$\boxed{\text{ア}}$数列である。

(2)　$a_{n+1}=r\cdot a_n$　のとき，数列$\{a_n\}$は$\boxed{\text{イ}}$数列である。

(3)　漸化式　$a_{n+1}-a_n=b_n$　の解法のポイントは，$\boxed{\text{ウ}}$である。

(4)　漸化式　$a_{n+1}=p\cdot a_n+q$　の解法のポイントは，$\boxed{\text{エ}}$である。

(5)　漸化式　$a_{n+1}=\dfrac{p\cdot a_n}{q\cdot a_n+r}$　の解法のポイントは，$\boxed{\text{オ}}$である。

(6)　漸化式　$a_{n+1}=p\cdot a_n+r^n$　の解法のポイントは，$\boxed{\text{カ}}$である。

B 問題

(1)　a_{n+1}がa_nの積・商・指数の式で表されている漸化式の解法のポイントは，$\boxed{\text{キ}}$である。

(2)　和S_nを含む漸化式の解法のポイントは，$\boxed{\text{ク}}$である。

(3)　連立漸化式　$\begin{cases} a_{n+1}=p\cdot a_n+q\cdot b_n \\ b_{n+1}=q\cdot a_n+p\cdot b_n \end{cases}$ の解法のポイントは，$\boxed{\text{ケ}}$である。

(4)　連立漸化式　$\begin{cases} a_{n+1}=p\cdot a_n+q\cdot b_n \\ b_{n+1}=r\cdot a_n+s\cdot b_n \end{cases}$ の解法のポイントは，$\boxed{\text{コ}}$である。

(5)　3 項間漸化式の解法のポイントは，$\boxed{\text{サ}}$である。

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 数列篇

標準問題

⑫4-標-1

　等差数列$\{a_n\}$の初項a，公差dはともに整数とする。$\{a_n\}$はともに整数とする。$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nは$n=8$のとき最大となり，そのときの値は 136 であるという。このとき，a, dの値を求めよ。

⑫4-標-2

　a, bを$a<b$なる整数とし，pを素数とする。aとbの間にあってpを分母とする既約分数の和を求めよ。

⑫4-標-3

　初項がaで，公比$r\,(>0)$の等比数列がある。初項から第n項までの和は 80 で，そのなかで最大の値は 54 である。また，初項から第$2n$項までの和は 6560 である。この数列の初項と公比を求めよ。

⑫4-標-4

次の和を求めよ。

(1)　$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$

(2)　$1\cdot 2\cdot(n-1)+2\cdot 3\cdot(n-2)+3\cdot 4\cdot(n-3)+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n\cdot 1$

⑫**4-標-5**

(1)　数列$1, 2, 3, \cdots, n$において，異なる 2 項ずつの積の和を求めよ。

(2)　(1)において，連続しない異なる 2 整数の積の和を求めよ。

⑫**4-標-6**

次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{4k+3}{k(k+1)(k+2)}$

⑫**4-標-7**

$1, 2, 3, \cdots, n$から差が 2 以下である任意の異なる 2 数をとり，その積をつくる。それらの積の逆数の総和を求めよ。ただし，$n \geq 4$とする。

⑫**4-標-8**

数列$\{a_n\}$が初項 1，公比 2 の等比数列であるとき，次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\,a_k$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2a_k$

発展問題

⑫**4-発-1**

いくつかの連続な自然数の和が 500 であるとき，この連続な自然数を求めよ。

⑫**4-発-2**

ある会社の社員の定年退職の時期は規定の年齢に達した年の年度末である。その会社の社員が定年退職時に元利合計がQ万円となるように，定年退職の年度を含め毎年度末に，a万円ずつm回貯金する。また，退職後は毎年度末にb万円ずつn回引き出し，n年目の年末で預金残高がちょうどなくなるようにする。年利率r，1 年ごとの複利計算をするものとして，次の問いに答えよ。

(1)　aをQ, r, mで表せ。

(2)　bをQ, r, mで表せ。

⑫**4-発-3**

2 でも 3 でも割り切れない正の整数の全体を小さいものから順に並べて$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$とする。与えられた正の整数$n$に対して$a_m \leq 6n$となる最大の$m$に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} {a_k}^2$を求めよ。

⑫**4-発-4**

数列$x_1, x_2, \cdots, x_n$はn個の自然数 $1, 2, \cdots, n$ を並べかえたものである。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-k\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-n+k-1\right)^2$を$n$の式で表せ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-k\right)^2$が最大となるように $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の並べ方を定めよ。

⑫**4-発-5**

(1)　実数 x_i, y_i を係数とする n 個の t の 2 次式：

$$(x_i t - y_i)^2 = x_i^2 t^2 - 2x_i y_i t + y_i^2 \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$ を用いて，

不等式：$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$ が成り立つことを示せ。

(2)　実数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 が

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10,\quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 25$$

を満たすとき，a_5 の最大値を求めよ。

⑫**4-発-6**

(1)　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。このとき

$$S_{10}=\boxed{\text{ア}}\left(\boxed{\text{イ}}a+\boxed{\text{ウ}}d\right)$$

である。ここで

$$S_{10}=-5,\quad S_{16}=8$$

が成り立つとき

$$a=\boxed{\text{エオ}},\quad d=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

であり，また，S_1，S_2，……，S_{100} の中で最小の値は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

(2)　初項 15，公比 2 の等比数列を $\{b_n\}$ とし，正の整数 n を 4 で割ったときの余りを c_n とする。このとき

$$c_1+c_2+\cdots+c_{40}=\boxed{\text{コサ}}$$

$$b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_{40}c_{40}=\boxed{\text{シス}}\left(2^{\boxed{\text{セソ}}}-1\right)$$

である。

⑫4-発-7

正の偶数を小さいものから順に並べた数列

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\cdots$

について考える。

(1)　連続して並ぶ5項のうち，初めの3項の和が次の2項の和に等しければ，5項のうちの中央の項は $\boxed{アイ}$ である。

(2)　連続して並ぶ $2n+1$ 項のうち，初めの $n+1$ 項の和が次の n 項の和に等しければ，$2n+1$ 項のうちの中央の項は

$\boxed{ウ}\,n^2+\boxed{エ}\,n$

である。

(3)　連続して並ぶ5項のうち，初めの3項の2乗の和が次の2項の2乗の和に等しければ，5項のうちの中央の項は $\boxed{オカ}$ である。

(4)　連続して並ぶ $2n+1$ 項のうち，初めの $n+1$ 項の2乗の和が次の n 項の2乗の和に等しければ，$2n+1$ 項のうちの中央の項は

$\boxed{キ}\,n^2+\boxed{ク}\,n$

である。

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 漸化式篇

標準問題

⑫4-標-9

次の関係式で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$

(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=2\sqrt{a_n}\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$

⑫4-標-10

数列$\{a_n\}$が$a_1=1,\ na_{n+1}-(n+1)a_n=1\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$で定義されるとき, 一般項$a_n$を求めよ。

⑫4-標-11

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが次の条件を満たすものとする。

S_1=1,　$S_{n+1}-3S_n=2^{n+1}-1\quad (n\geq 1)$

このとき，一般項a_nを求めよ。

⑫4-標-12

数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$を$a_1=1,\ b_1=2$ および,

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-4b_n \\ b_{n+1}=2a_n+7b_n \end{cases}$$

によって定める。

(1)すべての自然数nに対して，$a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$が成立するような定数$p, q$の組をすべて求めよ。

(2) a_n, b_nをnで表せ。

⑫**4**-標-**13**

次の式で定められる数列$\left\{a_n\right\}$の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_2=5,\ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0\ \ \left(n=1, 2, 3, \cdots\right)$

(2)　$a_1=1,\ a_2=6,\ a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0\ \ \left(n=1, 2, 3, \cdots\right)$

発展問題

⑫**4**-発-**8**

数列$\left\{a_k\right\}$が$a_1=1,\ (k+2)\,a_k=(k-1)\,a_{k-1}\ \ \left(k=2, 3, \cdots\cdots\right)$で定められている。

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$を求めよ。

SoyPaste 数列・漸化式

SP⑫4-1 (j5-2)○

2 でも 3 でも割り切れない自然数の全体を小さい順から並べた数列を $\{a_n\}$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} a_k$ を求めよ．

SP⑫4-2 (s5-3)☆

自然数 n について，$n < x < n+1$ で $2^x + \dfrac{1}{2^x}$ が整数となる個数を a_n とする．

(1) a_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka_k$ を求めよ．

SP⑫4-3(r21-2)

次の和を求めよ．

$$\sum_{k=0}^{199} \frac{1}{\sqrt{k+\dfrac{1}{2}+\sqrt{k(k+1)}}}$$

SP⑫4-4 (j28-2)○

1 と 400 の間にある 3 の倍数で，連続する 2 つの自然数の積に分解できるものの和を求めよ．

SP⑫4-5(j29-1)○

立方体の積み木を縦横 51×51 個敷きつめ，その上に縦横 49×49 個の積み木を重ねる．重ねる積み木が 1 個になるまでこの操作を繰り返してピラミッドの模型を作るとき，必要な積み木の数は (　　) 個である．

SP⑫4-6(r35-2)○

次の各数列 $\{a_n\}$ について，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}$ を調べよ．

(1) $a_n = cr^n$　$(c > 0,\ r > 0)$

(2) $a_n = \dfrac{1}{n^2+2n}$

SP⑫4-7 (s36-1)☆

数列 $\{a_n\}$ において，

$$\sum_{k=1}^{n} 5^{-k}k(k+1)a_k = 2\left(n+\frac{1}{4}\right)^2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立っている．

(1) a_n を n の式で表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

SP⑫4-8(r11-2)

数列 $\{a_n\}$ が関係式

$$a_1=1,\quad a_{n+1}\sqrt{a_n}=8 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たしている．

(1) $b_n=\log_2 a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，b_{n+1} と b_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

SP⑫4-9 (r17-1)

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\frac{1}{3},\quad \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定め，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1=a_1a_2,\quad b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．

(1) 一般項 a_n を n を用いて表せ．

(2) 一般項 b_n を n を用いて表せ．

SP⑫4-10 (r27-2)

$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ において，$a_5=($　　$)$，また，一般項は $a_n=($　　$)$ である．

SP⑫4-11 (j11-3)

次の条件 (i), (ii), (iii) で定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$$(\mathrm{i})\quad a_1 = 1,\ a_n > 0 \qquad (\mathrm{ii})\quad b_n = \frac{1}{4}{a_n}^2 \qquad (\mathrm{iii})\quad a_n - a_{n+1} = 2\sqrt{b_n b_{n+1}}$$

SP⑫4-12 (j23-2)○

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$ として，一般には $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \geqq 1$ と定義する．さらに，a_n を 3 で割った余りを b_n とする．このとき，b_1 から b_{100} までの和を求めよ．

SP⑫4-13 (j26-4)○

数列 $\{a_n\}$ を，

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + (2n+3)a_n} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

SP⑫4-14 (j17-1)○

数列 $\{a_n\}$ は関係式

$$2\sum_{k=1}^{n} a_k = 3^n - a_n - 6$$

を満たしているとする．

(1) 初項 a_1 を求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

SP⑫4-15 (s17-2)☆

数列 $\{a_n\}$ があって，すべての n について，初項 a_1 から第 n 項までの和が $\left(a_n + \dfrac{1}{4}\right)^2$ に等しいとする．

(1) a_n がすべて正とする．一般項 a_n を求めよ．

(2) 最初の 100 項のうち，1 つが負で他はすべて正とする．a_{100} を求めよ．

SP⑫4-16 (s27-1)☆

数列 $\{a_n\}$ に対して，初項から第 n 項までの和を S_n とする．a_n と S_n が関係式

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ S_{n+1} = 4a_n - 7 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

を満たすとする．

(1) a_{n+1} $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を a_n と a_{n-1} を用いて表せ．

(2) a_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ．

(3) S_n の最大値とそのときの n の値を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{nS_{2n}}{(S_n)^2}$ を求めよ．

SP⑫4-17 (r32-2)○

数列 $\{a_n\}$: 1，2，2，3，3，3，4，4，4，4，5，$\cdots$ がある．

(1) a_{2016} を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2016} a_k$ を求めよ．

SP⑫4-18 (j32-4)○

数列 $\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{2}{2}$，$\dfrac{3}{1}$，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{3}$，$\dfrac{4}{1}$，$\dfrac{4}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{4}{4}$，$\dfrac{5}{1}$，$\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{5}{3}$，$\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{5}{5}$，$\cdots$ において，分子が n である項をまとめて，第 n 群と呼ぶことにする．例えば，第 4 群は数列の第 7 項から始まり，$\dfrac{4}{1}$，$\dfrac{4}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{4}{4}$ の 4 項を含んでいる．

(1) この数列の第 100 項は，第 (　　) 群の中の最初から (　　) 番目である．

(2) 分数を約分した値が 10 になる項が，この数列の最初に現れるのは第 (　　) 項であり，10 回目に現れるのは第 (　　) 項である．

(3) 第 540 群に含まれる項のうちで，分数を約分した値が整数になる項は (　　) 個あり，これらの項すべての和の値は (　　) である．

SP⑫4-19 (s32-2)○

右の表のように奇数が並んでいる．上から m 行，左から n 列にある数を $a_{m,\ n}$ と表す．例えば $a_{2,\ 3}=15$ である．

1	3	7	13	21
5	9	15	23	$\cdots$
11	17	25	$\cdots$	$\cdots$
19	27	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
29	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

(1)　$a_{1,\ n}$ を n を用いて表せ．

(2)　右の表の $a_{1,\ n}$ と $a_{n,\ 1}$ を結ぶ直線上にあるすべての数の集合を第 n 群と呼ぶ．例えば第 3 群は $\{7,\ \ 9,\ \ 11\}$ である．このとき，第 n 群に含まれるすべての数の和を n を用いて表せ．

(3)　251 は (2) で定めた第何群にあるか．また，$a_{m,\ n}=251$ とするとき，m と n を求めよ．

SP⑫4-20 (r39-1)○

$a_n=n^3-24n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) で表される数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．このとき，S_n が最小となる n の値と，そのときの最小値を求めよ．

SP⑫4-21 (j40-3)

a は整数とする．$x_n=n^3-an^2$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) で定められる数列 $\{x_n\}$ が，

$$x_1>x_2>x_3>\cdots>x_{14}>x_{15},\quad x_{15}<x_{16}<x_{17}<\cdots$$

を満たすとき，a を求めよ．

SP⑫4-22 (j21-5)

次の問に答えよ．

(1) 自然数 n について $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2$ とする．

このとき，

$$S_n=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}n+\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，

$$T_n=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}n+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}n}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$$

となる．

(2) 自然数 n について $a_n=2^{\frac{1}{n}}$，$U_n=\sum_{k=1}^{n}({a_n}^2-1){a_n}^{4k}$ とする．

このとき，$\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{\text{セ}}$ である．

また，

$$U_n=\frac{\boxed{\text{ソタ}}{a_n}^{\boxed{\text{チ}}}}{{a_n}^{\boxed{\text{ツ}}}+\boxed{\text{テ}}}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$$

となる．