第３２章　積分の応用Ｉ（数Ⅲ，３講分）

Ａ問題

32-A-1　F609A

定積分 $\displaystyle\int_0^2 |x-1|e^x\,dx$ を求めよ．

$$I=\int_0^2 |x-1|e^x\,dx$$ とする．

区間を分けると，

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 |x-1|e^x\,dx+\int_1^2 |x-1|e^x\,dx\\&=\int_0^1 \{-(x-1)\}e^x\,dx+\int_1^2 (x-1)e^x\,dx\\&=\int_1^0 (x-1)e^x\,dx+\int_1^2 (x-1)e^x\,dx.\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int (x-1)e^x\,dx&=(x-1)e^x-\int e^x\,dx\\&=(x-2)e^x+C\end{aligned}$$

(C は積分定数)

であるから，

$$G(x)=(x-2)e^x$$

とすると，

$$G(0)=-2,\quad G(1)=-e,\quad G(2)=0.$$

以上より，

$$\begin{aligned}I&=\Big[G(x)\Big]_1^0+\Big[G(x)\Big]_1^2\\&=G(0)-2G(1)+G(2)\\&=-2+2e.\end{aligned}$$

32-A-2 ＊ F610A

n は自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_0^\pi |\sin nx+\sqrt{3}\cos nx|\,dx$ を求めよ．

合成すると，

$$\sin nx+\sqrt{3}\cos nx=2\sin\left(nx+\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}I&=\int_0^\pi |\sin nx+\sqrt{3}\cos nx|\,dx\\&=\int_0^\pi \left|2\sin\left(nx+\frac{\pi}{3}\right)\right|dx.\end{aligned}$$

ここで，

$$nx+\frac{\pi}{3}=\theta$$

とおくと，

$$ndx=d\theta$$

であり，

x	0	$\longrightarrow$	π
θ	$\frac{\pi}{3}$	$\longrightarrow$	$n\pi+\frac{\pi}{3}$

であるから，

$$\begin{aligned}I&=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{n\pi+\frac{\pi}{3}} |\sin\theta|\cdot\frac{1}{n}\,d\theta\\&=\frac{2}{n}\int_0^{n\pi}|\sin\theta|\,d\theta\\&=\frac{2}{n}\cdot n\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\\&=2\Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi\\&=4.\end{aligned}$$

32-A-3 F611A

$1 < a < e$ のとき，関数 $f(a) = \int_0^1 |e^x - a|\,dx$ の最小値を求めよ．

$1 < a < e$ であるから，$e^x = a$ を満たす実数 t が区間 $0 \leqq x \leqq 1$ にただ 1 つ存在する．

それを t とすると，

$$e^t = a \qquad \cdots ①$$

であるから，

$$t = \log a. \qquad \cdots ②$$

このとき，

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^t \{-(e^x - a)\}\,dx + \int_t^1 (e^x - a)\,dx \\ &= \int_t^0 (e^x - a)\,dx + \int_t^1 (e^x - a)\,dx \\ &= \Big[e^x - ax\Big]_t^0 + \Big[e^x - ax\Big]_t^1 \\ &= 1 - 2(e^t - at) + e - a \end{aligned}$$

であるから，①，②より，

$$\begin{aligned} f(a) &= 1 - 2(a - a\log a) + e - a \\ &= 2a\log a - 3a + e + 1. \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2\log a + 2a \cdot \frac{1}{a} - 3 \\ &= 2\log a - 1 \end{aligned}$$

であるから，$1 < a < e$ における $f(a)$ の増減は次のようになる．

a	(1)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	(e)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって，$f(a)$ は $a = \sqrt{e}$ のとき，

$$\text{最小値 } f(\sqrt{e}) = (\sqrt{e} - 1)^2$$

をとる．

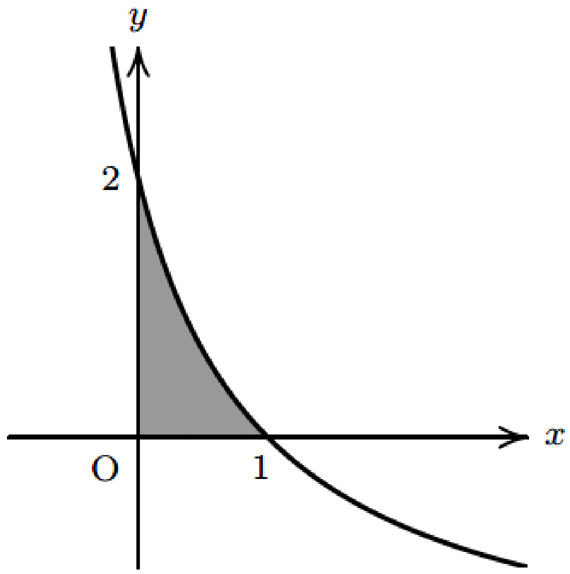
32-A-4 F617A

曲線 $y = \dfrac{-2x+2}{x+1}$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

$y = \dfrac{-2x+2}{x+1}$ を変形すると，

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{-2(x+1)+4}{x+1} \\
&= \frac{4}{x+1} - 2
\end{aligned}
$$

であるから，この曲線と x 軸，y 軸で囲まれた図形は次の図の網目部分である．



求める面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \frac{-2x+2}{x+1}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4}{x+1} - 2\right) dx \\
&= \Big[\,4\log(x+1) - 2x\,\Big]_0^1 \\
&= 4\log 2 - 2.
\end{aligned}
$$

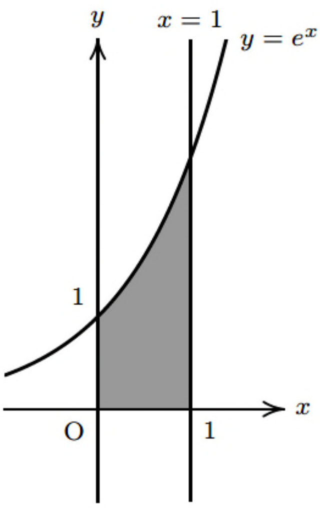
32-A-5 F618A

次の図形の面積を求めよ．

(1) 曲線 $y = e^x$ と直線 $x = 1$，x 軸，y 軸で囲まれた図形．

(2) 曲線 $y = e^x$ と直線 $y = e^2$，y 軸で囲まれた図形．

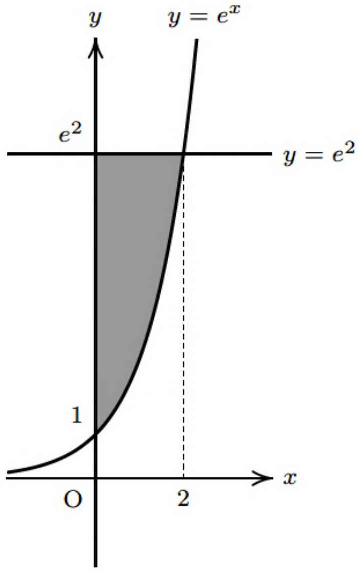
(1) 題意の図形は次の図の網目部分である．



求める面積を S とすると，

$$S = \int_0^1 e^x\,dx = \Big[\ e^x\ \Big]_0^1 = e - 1.$$

(2) 題意の図形は次の図の網目部分である．



求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (e^2 - e^x)\,dx \\ &= \Big[\ e^2x - e^x\ \Big]_0^2 \\ &= 2e^2 - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1. \end{aligned}$$

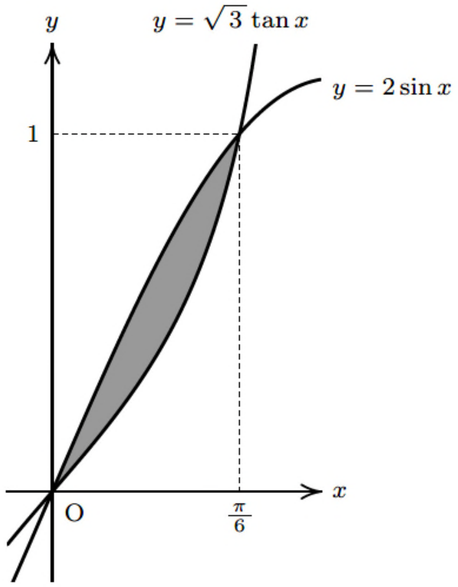
$\boxed{\textbf{32-A-6}}$ F619A

次の図形の面積を求めよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，2 曲線 $y = \sqrt{3}\tan x$，$y = 2\sin x$ で囲まれた図形．

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，2 曲線 $y = \cos x$，$y = \cos 2x$ で囲まれた図形．

(1) 題意の図形は次の図の斜線部分である．



また，

$$\sqrt{3}\tan x = 2\sin x$$

より，

$$\frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x} = 2\sin x$$

であるから，

$$\sqrt{3}\sin x = 2\sin x\cos x$$

$$2\sin x\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

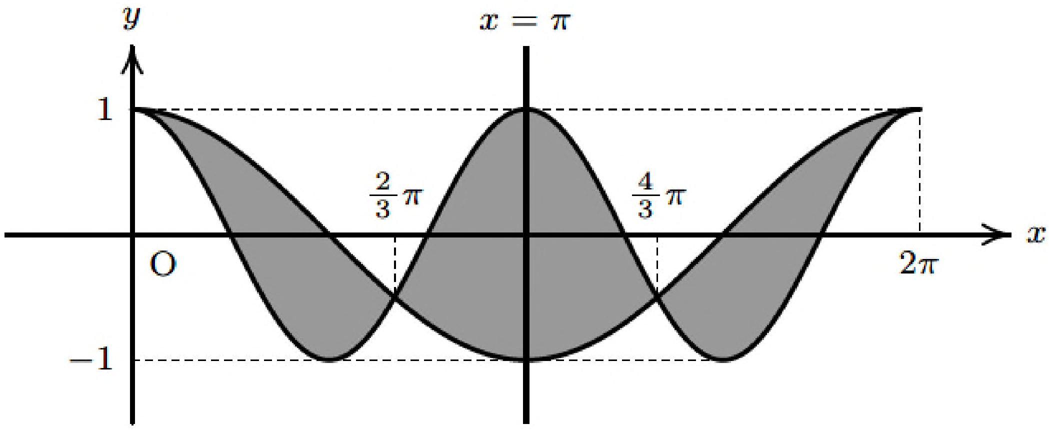
これを $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において解くと，

$$x = \frac{\pi}{6}.$$

したがって，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin x - \sqrt{3}\tan x)\,dx \\ &= \left[-2\cos x + \sqrt{3}\log\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3}\log\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

(2) 題意の図形は次の図の網目部分である．



また，

$$\cos x = \cos 2x$$

より，

$$\cos x = 2\cos^2 x - 1$$

であるから，

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0.$$

これを $0 < x < 2\pi$ において解くと，

$$x = \frac{2}{3}\pi,\quad \frac{4}{3}\pi.$$

さらに，図形が直線 $x = \pi$ に関して対称であるから，求める面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= 2\left\{\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos x - \cos 2x)\,dx + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(\cos 2x - \cos x)\,dx\right\} \\ &= 2\left\{\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\right\} \\ &= 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

32-A-7 F625A

xy 平面において，原点から曲線 C : $y=e^x$ に引いた接線を l とする.

(1) l の方程式を求めよ.

(2) C, l と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

(1) C の方程式より,

$$y'=e^x$$

であるから，点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は,

$$y=e^t(x-t)+e^t$$

すなわち,

$$y=e^tx+(1-t)e^t. \qquad \cdots (*)$$

これが原点を通る条件は,

$$(1-t)e^t=0$$

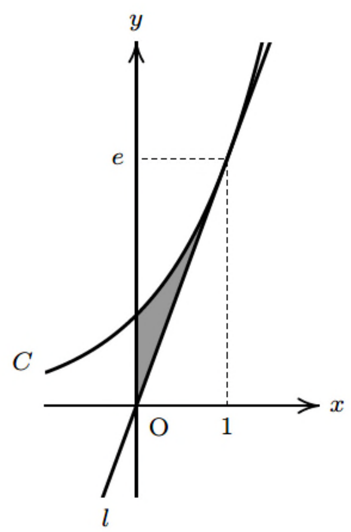
であるから,

$$t=1.$$

$(*)$ より，l の方程式は,

$$y=ex.$$

(2) (1) の結果より，C, l と y 軸で囲まれた図形は次の図の斜線部分である.



したがって，求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 e^x\,dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e \\ &= \Big[e^x\Big]_0^1-\frac{e}{2} \\ &= \frac{e}{2}-1. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{32-A-8}}$ ＊ F626A

曲線 C_1 : $y = ax^2$ と曲線 C_2 : $y = \log x$ はただ 1 点を共有し，その点におけるそれぞれの接線が一致しているものとする.

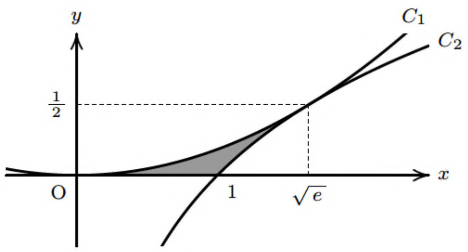
(1) 定数 a の値と共有点の座標を求めよ.

(2) C_1，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

(1)
$$f(x) = ax^2, \quad g(x) = \log x$$
とする.

C_1，C_2 がただ 1 点を共有し，その点におけるそれぞれの接線が一致する条件は接点の x 座標を t とすると，
$$\begin{cases} f(t) = g(t), \\ f'(t) = g'(t). \end{cases} \qquad \cdots (*)$$
ここで，
$$f'(x) = 2ax, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$
であるから，$(*)$ は，
$$\begin{cases} at^2 = \log t, \\ 2at = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$
これより，
$$\log t = \frac{1}{2}$$
であるから，
$$t = \sqrt{e}.$$
したがって，
$$ea = \frac{1}{2}$$
であるから，
$$a = \frac{1}{2e}.$$
さらに，共有点の座標は，
$$\left(\sqrt{e}, \ \frac{1}{2}\right).$$

(2) (1) の結果より，C_1，C_2 と x 軸で囲まれる図形は次の図の斜線部分である.



したがって，求める部分の面積を S とすると，
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2e}\,dx - \int_1^{\sqrt{e}} \log x\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6e}\right]_0^{\sqrt{e}} - \left[x\log x - x\right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{\sqrt{e}}{6} - \{(\sqrt{e}\log\sqrt{e} - \sqrt{e}) + 1\} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1. \end{aligned}$$

32-A-9 ＊ F627A

媒介変数 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ を用いて，

$$\begin{cases} x = 1 - t^4, \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

と表される曲線を C とする．

(1) C の概形をかけ．

(2) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)
$$\begin{cases} x = 1 - t^4, \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4t^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - 3t^2 \end{cases}$$

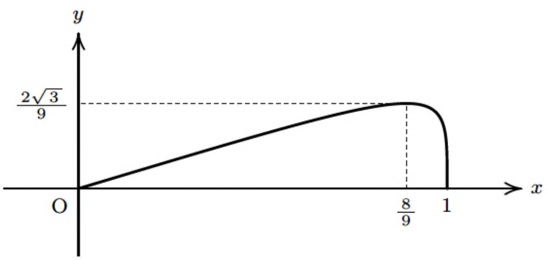
であるから，$0 \leqq t \leqq 1$ における点 $(x,\ y)$ の動きは次のようになる．
ただし，

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt} \right)$$

とする．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\vec{v}$ の向き	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\cdots$	$\left(\frac{8}{9},\ \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$	$\cdots$	$(0,\ 0)$

これより，C の概形は次のようになる．



(2) C と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y\,dx \\ &= \int_1^0 (t - t^3)(-4t^3)\,dt \\ &= 4\int_0^1 t^3(t - t^3)\,dt \\ &= 4\int_0^1 (t^4 - t^6)\,dt \\ &= 4\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{35}. \end{aligned}$$

B問題

32-B-1　F612B

$f(t)=\displaystyle\int_0^1 |\,t-x\,|e^x\,dx$ とする.

(1)　$f(t)$ を求めよ.

(2)　$f(t)$ の最小値を求めよ.

(1)　$g(x)=(t-x)e^x$ とすると,

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx&=\int (t-x)e^x\,dx\\&=(t-x)e^x+\int e^x\,dx\\&=(t+1-x)e^x+C.\qquad(C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

ここで,

$$G(x)=(t+1-x)e^x$$

とすると,

$$G'(x)=g(x)$$

であり,

$$\begin{aligned}G(0)&=t+1,\\G(1)&=et,\\G(t)&=e^t.\end{aligned}$$

区間 $0\leqq x\leqq 1$ と値 $x=t$ の位置関係で場合分けをする.

(i)　$t\leqq 0$ のとき,

$t\leqq x$ であるから,

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_0^1\{-g(x)\}\,dx\\&=\Big[-G(x)\Big]_0^1\\&=-G(1)+G(0)\\&=(1-e)t+1.\end{aligned}$$

(ii)　$0<t<1$ のとき,

$$|\,t-x\,|=\begin{cases}t-x & (0<x\leqq t\text{ のとき}),\\-(t-x) & (t<x<1\text{ のとき})\end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_0^t g(x)\,dx+\int_t^1\{-g(x)\}\,dx\\&=\int_0^t g(x)\,dx+\int_1^t g(x)\,dx\\&=\Big[G(x)\Big]_0^t+\Big[G(x)\Big]_1^t\\&=2G(t)-G(0)-G(1)\\&=2e^t-(e+1)t-1.\end{aligned}$$

(iii)　$t\geqq 1$ のとき,

$$t\geqq x$$

であるから,

$$\begin{aligned}f(t)&=\int_0^1 g(x)\,dx\\&=(e-1)t-1.\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii) より,

$$f(t)=\begin{cases}(1-e)t+1 & (t\leqq 0\text{ のとき}),\\2e^t-(e+1)t-1 & (0<t<1\text{ のとき}),\\(e-1)t-1 & (t\geqq 1\text{ のとき}).\end{cases}$$

(2)　(1) の結果より,

$$f(t)=\begin{cases}1-e & (t<0\text{ のとき}),\\2e^t-(e+1) & (0<t<1\text{ のとき}),\\e-1 & (t>1\text{ のとき}).\end{cases}$$

であるから, $f(t)$ の増減は次のようになる.

t	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\log\frac{e+1}{2}$	$\cdots$	(1)	$\cdots$
$f'(t)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(t)$	↘		↘		↗		↗

したがって, $f(t)$ は $t=\log\dfrac{e+1}{2}$ のとき,

$$\begin{aligned}\text{最小値 } f\left(\log\frac{e+1}{2}\right)&=2e^{\log\frac{e+1}{2}}-(e+1)\log\frac{e+1}{2}-1\\&=e-(e+1)\log\frac{e+1}{2}\end{aligned}$$

をとる.

32-B-2 ＊ F613B

(1) 自然数 k に対して，$I_k=\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx$，$J_k=\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ とするとき，I_k+J_k，I_k-J_k をそれぞれ k を用いて表せ．

(2) n を自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ を求めよ．

(1) I_k の定め方より，

$$\begin{aligned} I_k &= \Big[-e^{-x}\sin x\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\cos x\,dx \\ &= J_k \end{aligned}$$

であるから，

$$I_k-J_k=0. \qquad \cdots ①$$

また，J_k の定め方より，

$$\begin{aligned} J_k &= \Big[-e^{-x}\cos x\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}(-\sin x)\,dx \\ &= -e^{-k\pi}(-1)^k+e^{-(k-1)\pi}(-1)^{k-1}-\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx \\ &= (-e^{-\pi})^{k-1}(e^{-\pi}+1)-I_k \end{aligned}$$

であるから，

$$I_k+J_k=(1+e^{-\pi})(-e^{-\pi})^{k-1}. \qquad \cdots ②$$

(2) すべての自然数 k に対して，

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx=|I_k|$$

であるから，

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{n}|I_k|. \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

また，(①＋②)÷2 より，

$$I_k=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})(-e^{-\pi})^{k-1}. \qquad \cdots ④$$

③，④と $0<e^{-\pi}<1$ より，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})(e^{-\pi})^{k-1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})}{1-e^{-\pi}} \\ &= \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}. \end{aligned}$$

32-B-3 ＊ F614B

関数 $f(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x-a\cos x|\,dx$ の最小値を求めよ．

$a \leqq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - a\cos x)\,dx \\ &= \Big[-\cos x - a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1-a \end{aligned}$$

であるから，$f(a)$ は単調に減少する．

よって，

$$f(a) \geqq 1.$$

$a>0$ のとき，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，

$$\sin x - a\cos x = 0$$

を満たす x の値を θ とする，すなわち，

$$\sin\theta = a\cos\theta. \qquad \cdots (*)$$

このとき，

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^{\theta} (a\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} (-a\cos x + \sin x)\,dx \\ &= \Big[a\sin x + \cos x\Big]_0^{\theta} + \Big[a\sin x + \cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \\ &= 2a\sin\theta + 2\cos\theta - a - 1. \end{aligned}$$

ここで，$(*)$ より，θ が a の関数であるから，$f(a)$ を a で微分すると，

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2\sin\theta + 2a\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{da} - 2\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{da} - 1 \\ &= 2\sin\theta + 2(a\cos\theta - \sin\theta)\frac{d\theta}{da} - 1. \end{aligned}$$

これと，$(*)$ より，

$$f'(a) = 2\sin\theta - 1$$

であるから，

$$\begin{aligned} f'(a)<0 &\iff 0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6} &&\iff a < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ f'(a)=0 &\iff \theta = \frac{\pi}{6} &&\iff a = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ f'(a)>0 &\iff \frac{\pi}{6} < \theta \leqq \frac{\pi}{2} &&\iff a > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

が成り立つ．

これより，$a>0$ における $f(a)$ の増減は次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$f(a)$ が最小となる a の値は，

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

32-B-4 F620B

次の図形の面積を求めよ．

(1) 2 曲線 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$，$y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(2) 2 曲線 $y^2=4x$，$x^2=4y$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $\dfrac{2x}{x^2+1}=x^2$ より，

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^2+1}-x^2&=\frac{2x-x^2(x^2+1)}{x^2+1}\\&=\frac{-x(x^3+x-2)}{x^2+1}\\&=\frac{-x(x-1)(x^2+x+2)}{x^2+1}\end{aligned}$$

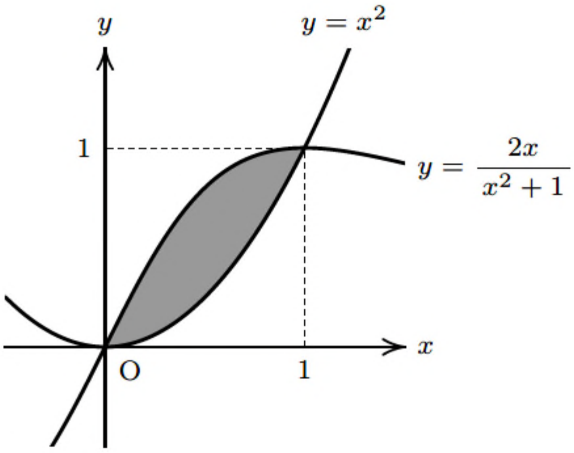
であるから，2 曲線の共有点の x 座標は，

$$x=0,\quad 1$$

であり，

$$0<x<1 \text{のとき，}\quad \frac{2x}{x^2+1}>x^2.$$

したがって，2 曲線で囲まれた図形は次の図の網目部分である．



これより，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}-x^2\right)dx\\&=\left[\log(x^2+1)-\frac{x^3}{3}\right]_0^1\\&=\log 2-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(2) $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ を連立すると,

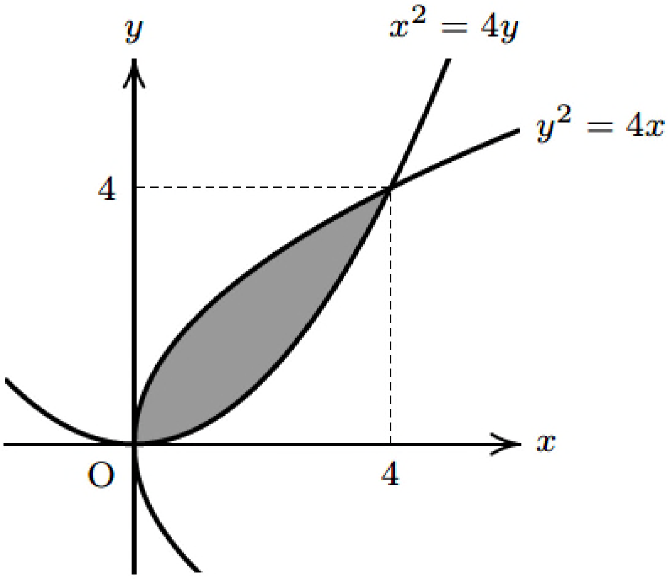
$$x^4 = 64x$$

$$x(x-4)(x^2+4x+16) = 0$$

であるから, 2 曲線の共有点の座標は,

$$x = 0,\quad 4.$$

したがって, 2 曲線で囲まれた図形は次の図の網目部分である.



さらに, 2 曲線は直線 $y = x$ に関して対称であるから, 求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^4 \left(x - \frac{1}{4}x^2\right) dx \\ &= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^3\right]_0^4 \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

32-B-5 F621B

2 曲線 $y=x^2$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

2 曲線 $y=x^2$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ と y 軸で囲まれた図形を T とし，面積を S とする．

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ において，

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0.$$

また，$y=x^2$ を代入すると，

$$\sqrt{x}+\sqrt{x^2}=2$$

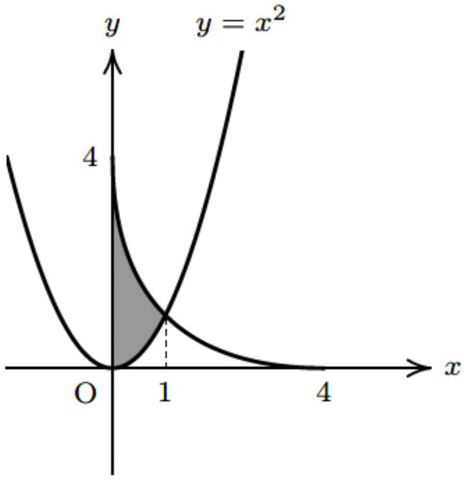
$$\sqrt{x^2}+\sqrt{x}-2=0$$

$$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)=0$$

であるから，2 曲線の共有点の x 座標は，

$$x=1.$$

以上より，T は次の図の網目部分である．



したがって，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(2-\sqrt{x})^2 - x^2\}\,dx \\ &= \int_0^1 (4-4\sqrt{x}+x-x^2)\,dx \\ &= \left[4x - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{32-B-6}}$ ＊ F622B

2 曲線 $C_1 : y = 2\sqrt{x-1}$，$C_2 : y = \log(x-1)+2$ がある．

(1) C_1，C_2 はただ 1 つの共有点をもつことを示せ．

(2) C_1，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $f(x) = 2\sqrt{x-1} - \{\log(x-1)+2\}$ とすると，

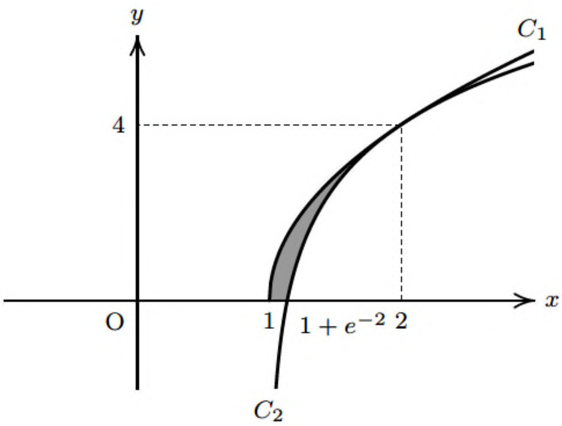
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{x-1} = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-1}$$

であるから，$x > 1$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

これより，方程式 $f(x)=0$ はただ 1 つの実数解 $x=2$ をもつので，C_1，C_2 はただ 1 つの共有点をもつ．

(2) C_1，C_2 と x 軸で囲まれた図形を図示すると，次の図の斜線部分である．



x 軸と C_2 の共有点の x 座標は，

$$x = 1 + e^{-2}.$$

以上より，C_1，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積 S は，

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^2 2\sqrt{x-1}\,dx - \int_{1+e^{-2}}^2 \{\log(x-1)+2\}\,dx \\
&= \left[\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - \Big[(x-1)\log(x-1)+x\Big]_{1+e^{-2}}^2 \\
&= \frac{4}{3} - \left\{2 - (e^{-2}\log e^{-2} + 1 + e^{-2})\right\} \\
&= \frac{1}{3} - e^{-2}.
\end{aligned}$$

32-B-7 F628B

xy 平面上に，媒介変数 θ $\left(-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$ を用いて表される曲線

$$C : x = \tan\theta, \quad y = \cos 2\theta$$

がある．

(1) C の概形をかけ．

(2) C と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(1)
$$\begin{cases} x = \tan\theta, \\ y = \cos 2\theta \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}, \\ \dfrac{dy}{d\theta} = -2\sin 2\theta \end{cases}$$

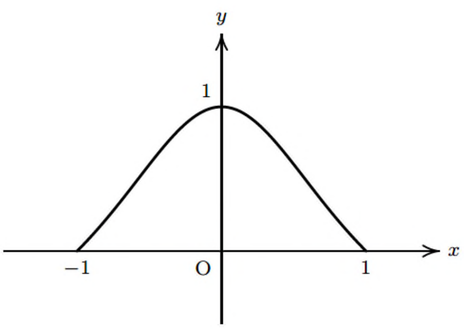
であるから，$-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ における点 $(x,\ y)$ の動きは次のようにな
る．ただし，

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right)$$

とする．

θ	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\vec{v}$ の向き	$\nearrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\searrow$
$(x,\ y)$	$(-1,\ 0)$	$\cdots$	$(0,\ 1)$	$\cdots$	$(1,\ 0)$

これより，C の概形は次のようになる．



(2) C と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} y\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta \\ &= 2\Big[2\theta - \tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi - 2. \end{aligned}$$

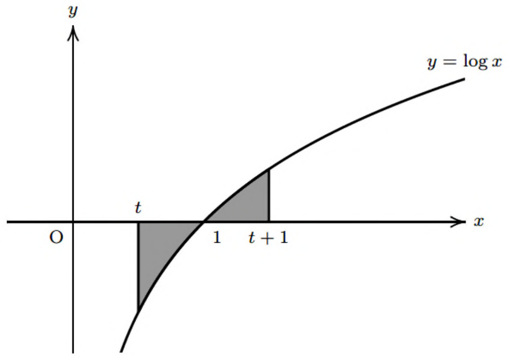
32-B-8 F629B

$t>0$ とする．曲線 $y=\log x$ と x 軸と 2 直線 $x=t$，$x=t+1$ で囲まれた図形の面積の最小値を求めよ．

曲線 $y=\log x$ と軸と 2 直線 $x=t$，$x=t+1$ で囲まれた図形を T とし，その面積を $S(t)$ とする．

t と 1 との大小関係で場合分けをする．

(i)　$0<t<1$ のとき，T は次の図の網目部分である．



このとき，

$$S(t)=\int_t^1(-\log x)\,dx+\int_1^{t+1}\log x\,dx$$
$$=\int_1^t\log x\,dx+\int_1^{t+1}\log x\,dx$$

であるから，

$$S'(t)=\log t+\log(t+1)$$
$$=\log t(t+1).$$

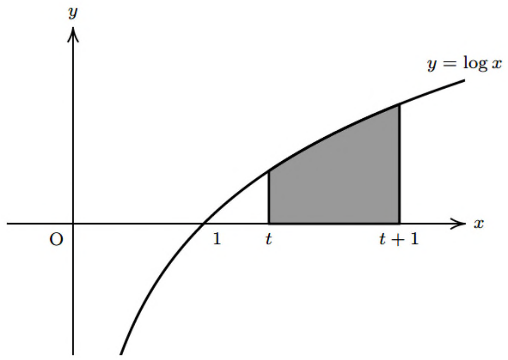
$S'(t)=0$ とすると，

$$t(t+1)=1$$
$$t^2+t-1=0$$

であるから，$0<t<1$ より，

$$t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

(ii)　$t\geqq 1$ のとき，T は次の図の網目部分である．



以上より，$t>0$ における $S(t)$ の増減は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$S(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$

したがって，$S(t)$ は $t=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とき，最小となる．

ここで，$0<t<1$ のとき，

$$S(t)=\Big[x\log x-x\Big]_1^t+\Big[x\log x-x\Big]_1^{t+1}$$
$$=t\log t-t+1+(t+1)\log(t+1)-(t+1)+1$$
$$=t\log t(t+1)+\log(t+1)-2t+1$$

であるから，$S(t)$ の最小値は，

$$S\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}+2-\sqrt{5}.$$

32-B-9 ＊ F630B

曲線 $y = \sin 2x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，曲線 $y = a\sin x$ が二等分するような定数 a の値を求めよ．

$\sin 2x = a\sin x$ より，

$$2\sin x\cos x = a\sin x$$
$$\sin x(2\cos x - a) = 0$$

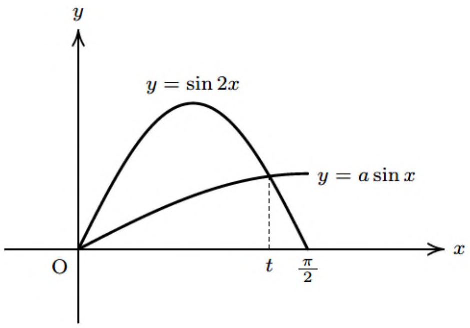
であるから，

$$\sin x = 0 \text{ または } \cos x = \frac{a}{2}.$$

条件が成り立つためには，

$$0 < a < 2$$

が必要である．



このとき，

$$\cos t = \frac{a}{2} \qquad \cdots (\star)$$

を満たす t が $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ に存在する．

この t に対して，

$$\int_0^t (\sin 2x - a\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx \qquad \cdots (*)$$

を満たす a の値を求めればよい．

$$\begin{aligned}((*)\text{ の右辺}) &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}((*)\text{ の左辺}) &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + a\cos x\right]_0^t \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2t + a\cos t + \frac{1}{2} - a \\ &= -\frac{1}{2}(2\cos^2 t - 1) + a\cos t - a + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから，$(\star)$，$(*)$ より，

$$-\frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1\right\} + \frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

整理すると，

$$a^2 - 4a + 2 = 0$$

であるから，$0 < a < 2$ より，求める a の値は，

$$a = 2 - \sqrt{2}.$$

C問題

32-C-1　F615C

0 以上の整数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ とする．ただし，$\tan^0 x = 1$ とする．

(1) I_0，I_1 の値をそれぞれ求めよ．

(2) $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を示せ．

(4) 1 以上の整数 n に対して，

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$
$$T_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n}$$

とするとき，　および　の値を求めよ。

32-C-2　F623C

曲線 $2x^2 - 2xy + y^2 = 4$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

32-C-3　F624C

曲線 $y^2 = x^2(4 - x^2)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

32-C-4　F チャレ 77　京都大学

次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$$

32-C-5　F ﾁｬﾚ 78　2006 大阪大学

曲線 C : $y = x\sin^2 x$ と直線 l : $y = x$ の共有点のうち，x 座標が正のものを，x 座標が小さいものから順に A_1，A_2，A_3，$\cdots$ とし，第 n 番目のものを A_n とする．

(1) 点 A_n の x 座標を求めよ．また，点 A_n において，C と l は接していることを示せ．

(2) 線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と C で囲まれる図形の面積を求めよ．

32-C-6 F631C

媒介変数 θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を用いて，

$$x = \cos^3\theta, \quad y = \sin^3\theta$$

と表される曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

32-C-7 F631C

媒介変数 t を用いて，

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = 2 + t - t^2 \end{cases}$$

と表される曲線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

演習問題

32-E-1

曲線 C : $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 l : $y=ax$ $(a>0)$ および y 軸で囲まれる図形の面積を S_1 とする．また，C と l および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる図形の面積を S_2 とし，$S=S_1+S_2$ とする．このとき，S の最小値を求めよ．

32-E-2 FGE　計算問題

定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} |5\sin x+12\cos x|\,dx$ を求めよ．

32-E-3 FGE　計算問題

$0 \leqq t \leqq 2$ のとき，関数 $f(t)=\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x}-t|\,dx$ の最大値，最小値を求めよ．

32-E-4 FGE（発展）

n は自然数とする．

(1)　$1-x+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x^{3k}-x^{3k+1})=\dfrac{1-x^{3n+3}}{1+x+x^2}$ を示せ．

(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$ の値を求めよ．

(3)　$I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+x+1}\,dx$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(4)　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$ を求めよ．

32-E-5 ＊ FGE

$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ における関数 $f(x) = \dfrac{\pi}{4}\tan x$ の逆関数を $g(x)$ とする．

このとき，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

32-E-6 FGE 計算問題

$\boxed{3}$ 媒介変数 $t\ (0 \leqq t \leqq 2)$ を用いて，

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t - t^2 \end{cases}$$

と表される曲線を C とする．

(1) C の概形をかけ．

(2) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

32-E-7 FGE（発展）

媒介変数 $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を用いて，

$$\begin{cases} x = \sin\theta + \cos\theta, \\ y = \sin^2\theta \end{cases}$$

と表される曲線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．