第３３章　積分の応用２（数Ⅲ，２講分）

A問題

33-A-1　F633A

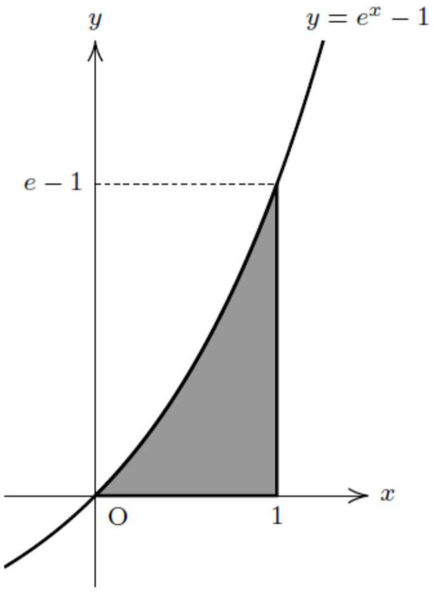
底から $x$cm の高さにある平面における切り口が，一辺 $x$cm の正方形となる容器がある．深さが 3cm のとき，この容器の容積を求めよ．

容器の容積を V とすると，

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 x^2\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 \\ &= 9. \end{aligned}$$

33-A-2　F634A

曲線 $y = e^x - 1$ と，2 直線 $x = 1$，$y = 0$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

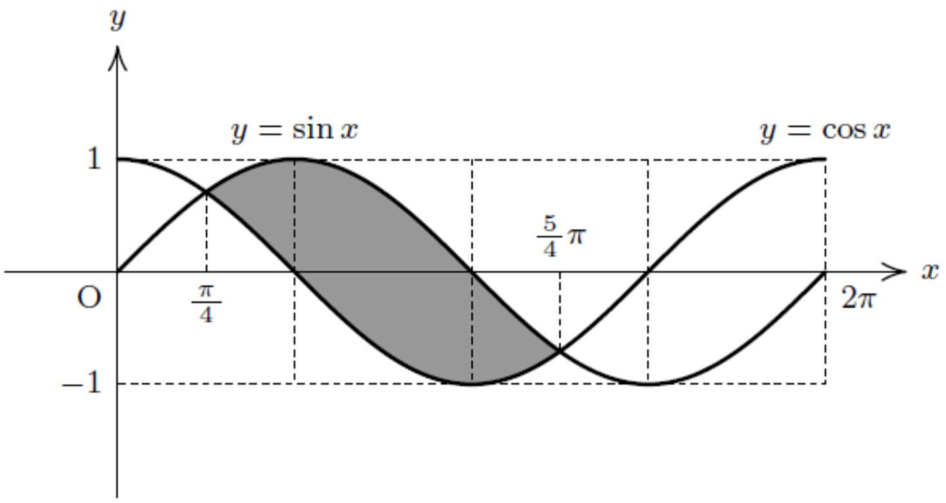


求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi y^2\,dx \\ &= \pi\int_0^1 (e^x - 1)^2\,dx \\ &= \pi\int_0^1 (e^{2x} - 2e^x + 1)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x\right]_0^1 \\ &= \pi\left\{\left(\frac{1}{2}e^2 - 2e + 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right)\right\} \\ &= \frac{\pi}{2}(e^2 - 4e + 5). \end{aligned}$$

33-A-3 F635A ＊

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ の範囲で，曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = \cos x$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．



この図形は点 $\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ 0\right)$ に関して対称である．さらに，この図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は，平面 $x = \dfrac{3}{4}\pi$ に関して対称である．

したがって，求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}
V &= 2\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \pi(\sin x)^2\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(\cos x)^2\,dx\right\} \\
&= 2\pi\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\right\} \\
&= 2\pi\left\{\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} - \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right\} \\
&= 2\pi\left\{\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\right\} \\
&= \frac{\pi(\pi+6)}{4}.
\end{aligned}$$

33-A-4 F641A

xy 平面の原点から曲線 C : $y=\log x$ に引いた接線を l とし，C と l，x 軸で囲まれる図形を K とする．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) K を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(3) K を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(1) C の方程式より，

$$y' = \frac{1}{x}$$

であるから，点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は，

$$y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t,$$

すなわち，

$$y = \frac{x}{t} + \log t - 1. \qquad \cdots (*)$$

$(*)$ が原点を通る条件は，

$$\log t = 1$$

であるから，

$$t = e.$$

$(*)$ より，l の方程式は，

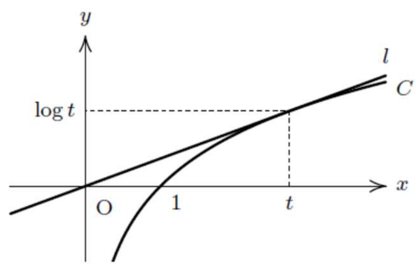
$$y = \frac{x}{e}.$$

(2) K を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_x とすると，

$$\begin{aligned}
V_x &= \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot e - \int_1^e \pi y^2\,dx \\
&= \frac{e}{3}\pi - \pi\int_1^e (\log x)^2\,dx \\
&= \frac{e}{3}\pi - \pi\left\{\Big[\,x(\log x)^2\,\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\} \\
&= \frac{e}{3}\pi - \pi\left(e - 2\int_1^e \log x\,dx\right) \\
&= -\frac{2}{3}e\pi + 2\pi\Big[\,x\log x - x\,\Big]_1^e \\
&= \left(2 - \frac{2}{3}e\right)\pi.
\end{aligned}$$

(3) K を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_y とすると，

$$\begin{aligned}
V_y &= \int_0^1 \pi x^2\,dy - \frac{1}{3}\pi\cdot e^2\cdot 1 \\
&= \pi\int_0^1 e^{2y}\,dy - \frac{e^2}{3}\pi \\
&= \pi\left[\,\frac{1}{2}e^{2y}\,\right]_0^1 - \frac{e^2}{3}\pi \\
&= \frac{e^2-3}{6}\pi.
\end{aligned}$$



33-A-5　F642A 改

媒介変数 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて，

$$x = \sin\theta, \quad y = \sin 2\theta$$

と表される曲線と x 軸で囲まれた図形を D とする．

D を x 軸のまわりに１回転させてできる立体の体積を求めよ．

(1)　$y = \sin 2\theta$ より，

$$y = 2\sin\theta\cos\theta$$

であり，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \sqrt{1-\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

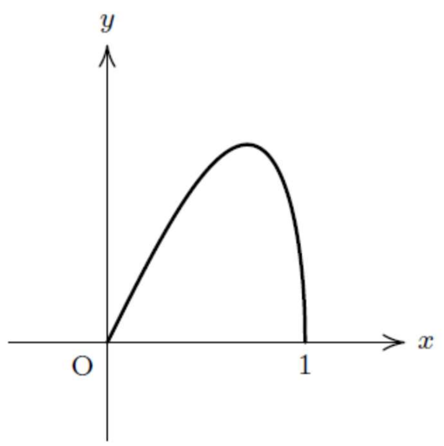
であるから，

$$y = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

であるから，D を図示すると，次の図の網目部分である．

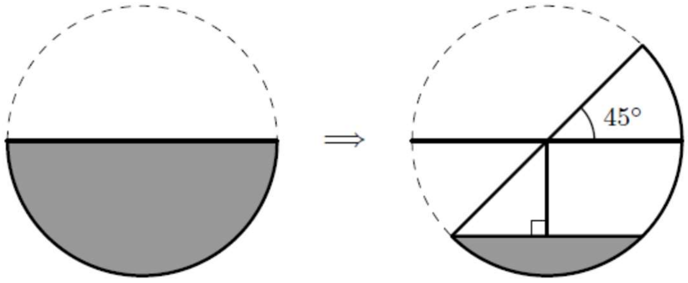


したがって，求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 \pi y^2\,dx \\ &= \pi\int_0^1 4x^2(1-x^2)\,dx \\ &= 4\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &= \frac{8}{15}\pi.\end{aligned}$$

33-A-6 ＊ F643A

半径 a の半球形の容器に水が満たしてある．これを静かに 45° 傾けるとどれだけの水が流れるか．

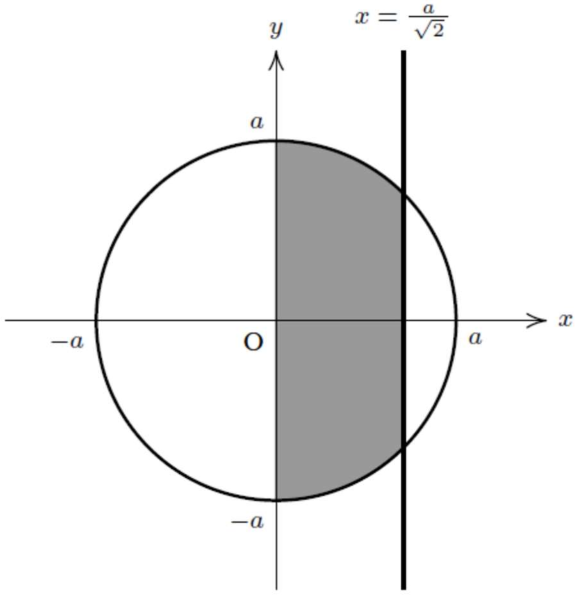


流れ出た水の量は，

$$円\ x^2+y^2=a^2$$

を x 軸のまわりに回転させた回転体の一部分の体積と等しい．

45° 傾けて残った水の水面は，初めの水面の高さから $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ の距離のところにある．



したがって，流れ出た水の量を V とすると，

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \pi y^2\,dx \\
&= \pi\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} (a^2-x^2)\,dx \\
&= \pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{5\sqrt{2}}{12}\pi a^3.
\end{aligned}$$

B問題

33-B-1 F636B

$a>0$ とする．

(1) 放物線 $y=ax^2$ と直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=a^3$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

(3) $V_1=V_2$ が成り立つような定数 a の値を求めよ．

(1) V_1 の定め方より，

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^a \pi y^2\,dx \\ &= \pi\int_0^a (ax^2)^2\,dx \\ &= a^2\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a \\ &= \frac{1}{5}a^7\pi. \end{aligned}$$

(2) V_2 の定め方より，

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^{a^3} \pi x^2\,dy \\ &= \pi\int_0^{a^3} \frac{y}{a}\,dy \\ &= \frac{\pi}{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{a^3} \\ &= \frac{1}{2}a^5\pi. \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果より，$V_1=V_2$ が成り立つのは，

$$\frac{1}{5}a^7\pi=\frac{1}{2}a^5\pi$$

のときであるから，

$$a^2=\frac{5}{2}.$$

$a>0$ より，

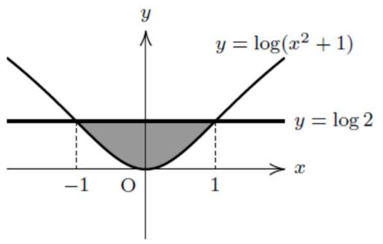
$$a=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

33-B-2 F637B

(1) 曲線 $y=\log(x^2+1)$ と直線 $y=\log 2$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) 曲線 $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(1) 曲線 $y=\log(x^2+1)$ と直線 $y=\log 2$ で囲まれた図形を図示すると，次の図の斜線部分である．



したがって，求める体積を V とすると，

$$V=\int_0^{\log 2}\pi x^2\,dy$$

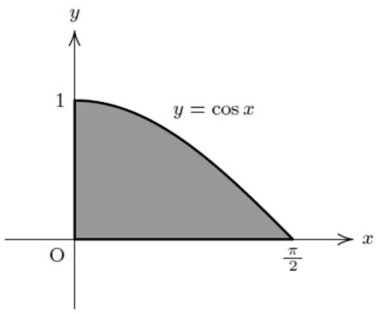
であるから，

$$y=\log(x^2+1) \iff x^2=e^y-1$$

より，

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\log 2}(e^y-1)\,dy \\ &= \pi\Big[e^y-y\Big]_0^{\log 2} \\ &= \pi(e^{\log 2}-\log 2-1) \\ &= \pi(1-\log 2). \end{aligned}$$

(2) 曲線 $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を図示すると，次の図の斜線部分である．



したがって，求める面積を S とすると，

$$V=\int_0^{1}\pi x^2\,dy$$

であるから，

$$y=\cos x \iff dy=-\sin x\,dx$$

より，

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}x^2(-\sin x)\,dx \\ &= \pi\left\{\Big[x^2\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{0}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}2x\cos x\,dx\right\} \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx \\ &= 2\pi\left\{\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\right\} \\ &= 2\pi\left(\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right) \\ &= \pi(\pi-2). \end{aligned}$$

33-B-3 F638B

(1) $0 < r < a$ とする．円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の周および内部を直線 $3x + 4y - 15 = 0$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(1) 円の方程式 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ より，

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

であるから，

$$\begin{cases} y_1 = a + \sqrt{r^2 - x^2}, \\ y_2 = a - \sqrt{r^2 - x^2} \end{cases}$$

とすると，求める体積 V は，対称性より，

$$\begin{aligned} V &= 2\left(\int_0^r \pi {y_1}^2\,dx - \int_0^r \pi {y_2}^2\,dx\right) \\ &= 2\pi \int_0^r ({y_1}^2 - {y_2}^2)\,dx \\ &= 8a\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx \\ &= 8a\pi \cdot \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi^2 a r^2. \end{aligned}$$

(2) 原点と直線 $3x + 4y - 15 = 0$ との距離を d とすると，

$$\begin{aligned} d &= \frac{|-15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

また，(1) の結果より，求める体積は，

$$2\pi^2 d \cdot 1^2 = 6\pi^2.$$

33-B-4 F644B

空間内の２点 $(0,\ 1,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 2)$ を通る直線を l とする．さらに，l を x 軸のまわりに１回転して得られる図形を M とする．

(1) 平面 $x=t$ と l との交点の座標を求めよ．

(2) M と２つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ．

(1) $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 2)$ とすると，直線 l 上の点 P は，実数 s を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表すことができる．

これより，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(s,\ 1-s,\ 2s)\end{aligned}$$

であるから，平面 $x=t$ と l との交点について，

$$s=t$$

が成り立つ．

これより，平面 $x=t$ と l との交点の座標は，

$$(t,\ 1-t,\ 2t).$$

(2) $\mathrm{Q}(t,\ 0,\ 0)$ とする．

M の平面 $x=t$ による切断面は Q を中心とする半径 PQ の円であるから，求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1\pi\mathrm{PQ}^2\,dt\\&=\pi\int_0^1\{(1-t)^2+4t^2\}\,dt\\&=\pi\int_0^1(5t^2-2t+1)\,dt\\&=\pi\left[\frac{5}{3}t^3-t^2+t\right]_0^1\\&=\frac{5}{3}\pi.\end{aligned}$$

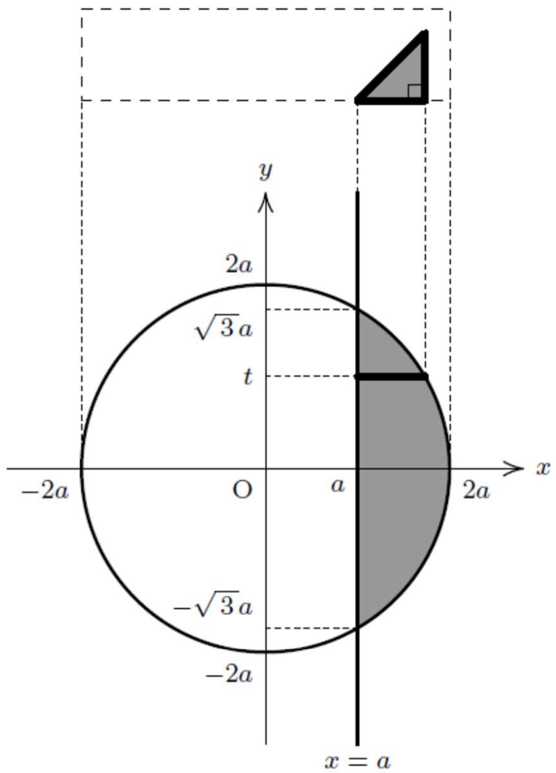
33-B-5 (1)FGE (2)F646B

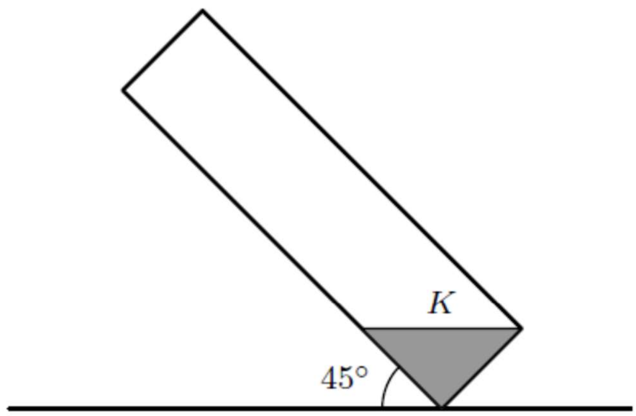
(1) 中心 O，半径 2 の円を底面とする円柱がある．この円柱を点 O を通り，底面と 30° の角を作る平面で切ったとき，切り口の平面と底面ではさまれた立体の体積を求めよ．

(2) 半径 $2a$，高さ a の円筒形のふたのない容器がある．底面が水平になるように容器を置き，内部に水を満たした．次に，容器を静かに 45° 傾けた．このとき，容器に残っている水の体積を求めよ．ただし，表面張力は無視する．

(1) $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$

(2)





このとき，切断面の面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=\frac{1}{2}(\sqrt{4a^2-t^2}-a)^2$$

であり，求める体積を V とすると，

$$V=\int_{-\sqrt{3}\,a}^{\sqrt{3}\,a} S(t)\,dt.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{\sqrt{3}\,a}(\sqrt{4a^2-t^2}-a)^2\,dt\\
&=\int_0^{\sqrt{3}\,a}(5a^2-t^2-2a\sqrt{4a^2-t^2}\,)\,dt\\
&=\left[5a^2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}\,a}-2a\left\{\frac{1}{2}(2a)^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\,a\cdot a\right\}\\
&=\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)a^3.
\end{aligned}$$

33-B-6 F645B

連立不等式 $x \geqq 0$，$x^2+y^2 \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq y^2$ を満たす立体の体積を求めよ．

不等式

$$x \geqq 0, \quad x^2+y^2 \leqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq y^2 \qquad \cdots (*)$$

で表される立体を平面 $y=k$ $(-1 \leqq k \leqq 1)$ で切断したときの切り口を D_k とする．

D_k を zx 平面に正射影したときの図形は $(*)$ より，不等式

$$0 \leqq x \leqq \sqrt{1-k^2}, \quad 0 \leqq z \leqq k^2$$

で表される長方形である．

したがって，D_k の面積を $S(k)$ とすると，

$$S(k) = k^2\sqrt{1-k^2}$$

であり，求める体積を V とすると，

$$V = \int_{-1}^{1} S(k)\,dk$$

であるから，

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} k^2\sqrt{1-k^2}\,dk \\ &= 2\int_0^1 k^2\sqrt{1-k^2}\,dk. \end{aligned}$$

ここで，

$$k = \sin\theta \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと，

$$dk = \cos\theta\,d\theta$$

であり，

k	0	$\longrightarrow$	1
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

であるから，

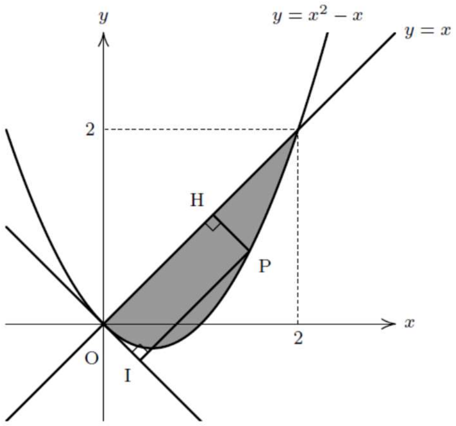
$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^1 k^2\sqrt{1-k^2}\,dk \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

C問題

33-C-1 F639C

放物線 $y=x^2-x$ と直線 $l: y=x$ で囲まれた図形を，l を軸にして 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

放物線 $C: y=x^2-x$，直線 $l: y=x$ を図示すると，次の図のようになる．



C と l の交点のうち，原点以外の点を A とすると，

$$\mathrm{A}(2,\ 2)$$

であるから，

$$\mathrm{OA}=2\sqrt{2}.$$

また，原点を通り，l に垂直な直線を m とすると，m の方程式は，

$$y=-x.$$

このとき，l を X 軸，m を Y 軸とし，C 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t)$ をとり，P から l に下ろした垂線の足を H とすると，

$$V=\int_0^{2\sqrt{2}}\pi\mathrm{PH}^2\,dX.$$

ここで，

$$\mathrm{PH}=\frac{|t^2-2t|}{\sqrt{2}}$$

であり，P から m に下ろした垂線の足を H$'$ とすると，

$$\begin{aligned}X&=\mathrm{PH}'\\&=\frac{|t^2|}{\sqrt{2}}\\&=\frac{t^2}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

であるから，

$$dX=\sqrt{2}\,t\,dt.$$

さらに，

X	0	$\longrightarrow$	$2\sqrt{2}$
t	0	$\longrightarrow$	2

であるから，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^2\left(\frac{|t^2-2t|}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\sqrt{2}\,t\,dt\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^2 t(t^2-2t)^2\,dt\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^2(t^5-4t^4+4t^3)\,dt\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left[\frac{t^6}{6}-\frac{4}{5}t^5+t^4\right]_0^2\\&=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi.\end{aligned}$$

33-C-2 F640C

$f(x) = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とする．曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，

$$V = \int_0^{\pi} 2\pi x f(x)\, dx$$

と表されることを示し，V の値を求めよ．

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ である x を x_1，　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である x を x_2 とすると，

$$V = \int_0^1 \pi {x_1}^2\, dy - \int_0^1 \pi {x_2}^2\, dy.$$

さらに，$f(x) = \sin x$ とすると，

$$dy = f'(x)\, dx$$

であり，x_1，x_2 について，

y	0	$\to$	1
x_1	π	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

y	0	$\to$	1
x_2	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

であるから，

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2 f'(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2 f'(x)\, dx \\
&= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \pi x^2 f'(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \pi x^2 f'(x)\, dx \\
&= \int_{\pi}^{0} \pi x^2 f'(x)\, dx \\
&= \Big[\pi x^2 f(x)\Big]_0^{\pi} - \int_{\pi}^{0} 2\pi x f(x)\, dx \\
&= \int_0^{\pi} 2\pi x f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\, dx \\
&= 2\pi \left\{ \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx \right\} \\
&= 2\pi\Big(\pi + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi}\Big) \\
&= 2\pi^2.
\end{aligned}$$

33-C-3 F648C

xyz 空間において，2 つの無限に長い円柱 T_1，T_2 を考える．

$$T_1 = \{(x,\ y,\ z) \mid y^2 + z^2 \leqq 1\}$$

$$T_2 = \{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + z^2 \leqq 1\}$$

(1) T_1 と T_2 の共通部分の体積を求めよ．

(2) T_1 と T_2 の共通部分の表面積を求めよ．

T_1 と T_2 の共通部分を K とし，K の体積を V，表面積を S とする．

また，

$$y^2 + z^2 \leqq 1, \quad x^2 + z^2 \leqq 1$$

より，

$$y^2 \leqq 1 - z^2, \quad x^2 \leqq 1 - z^2$$

であるから，$x^2 \geqq 0$，$y^2 \geqq 0$ より，

$$-1 \leqq z \leqq 1.$$

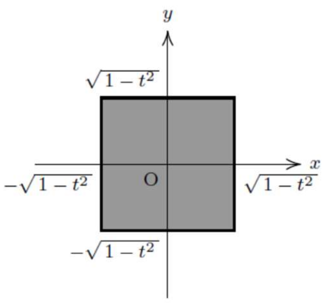
(1) K を平面 $z = t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切断したときの切断面は，

$$\begin{cases} y^2 + t^2 \leqq 1, \\ x^2 + t^2 \leqq 1 \end{cases}$$

であることから，

$$\begin{cases} -\sqrt{1-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-t^2}, \\ -\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

これより，切断面は次のようになる．

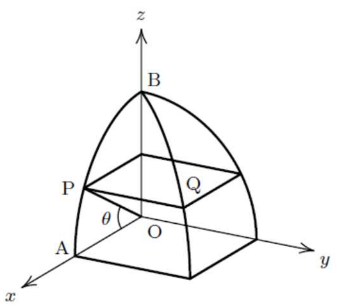


したがって，

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} (2\sqrt{1-t^2})^2\,dt \\ &= 8\int_0^1 (1-t^2)\,dt \\ &= 8\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

(2) K の $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ を満たす部分は次のようになる．

ただし，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 0,\ 1)$ とする．



対称性より，K の $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$，$y \leqq x$ を満たす部分の表面積 T を求める．

ここで，弧 AB 上に点 P をとり，

$$\angle \mathrm{POA} = \theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

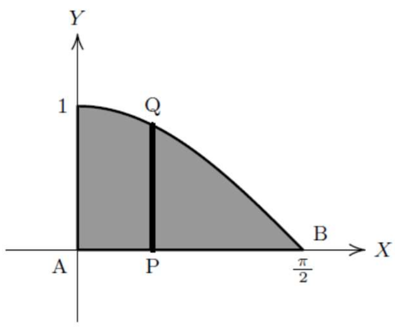
とすると，

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta)$$

であり，P を通り，xy 平面と平行な平面と平面 $y = x$ との交点のうち，K 上の点を Q とすると，

$$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta).$$

このとき，弧 AB を線分として，X 軸に重なるようにすると，次のようになる．



弧 AP の長さが θ であることから，この図における Q の座標を

$$\mathrm{Q}(X,\ Y)$$

とすると，

$$\begin{cases} X = \theta, \\ Y = \cos\theta. \end{cases}$$

したがって，

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{PQ}\,dX \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y\frac{dX}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \\ &= \Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから，$S = 16T$ より，

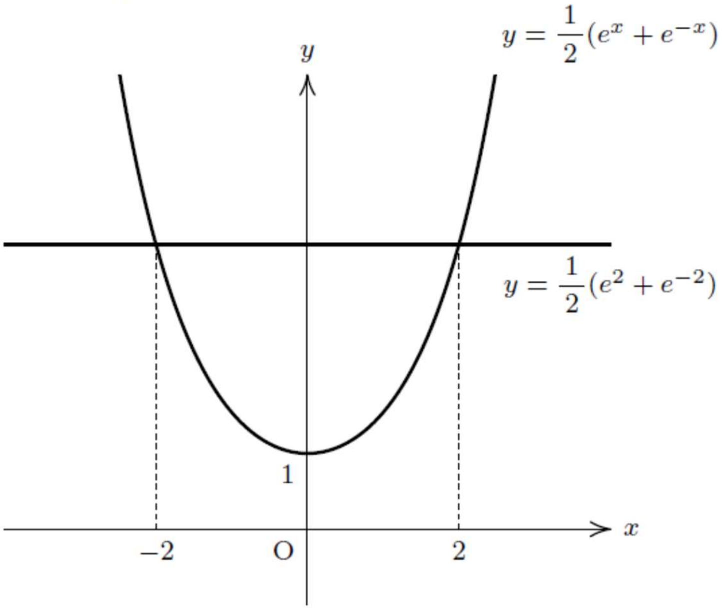
$$S = 16.$$

演習問題

33-E-1 F ﾁｬﾚ 80　2002 日大

曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $(0 \leqq x \leqq 2)$，直線 $y=\dfrac{1}{2}(e^2+e^{-2})$ および y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，直線 $y=\dfrac{1}{2}(e^2+e^{-2})$ を図示すると，次の図のようになる．



求める体積を V とすると，

$$V=\int_1^{\frac{1}{2}(e^2+e^{-2})} \pi x^2\,dy$$

であるから，

$$dy=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\,dx$$

より，

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{2}\int_0^2 x^2(e^x-e^{-x})\,dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left\{\Big[x^2(e^x+e^{-x})\Big]_0^2-\int_0^2 2x(e^x+e^{-x})\,dx\right\} \\
&= \pi\left\{2(e^2+e^{-2})-\int_0^2 x(e^x+e^{-x})\,dx\right\} \\
&= \pi\left\{2(e^2+e^{-2})-\Big[x(e^x-e^{-x})\Big]_0^2+\int_0^2 (e^x-e^{-x})\,dx\right\} \\
&= \pi\left\{2(e^2+e^{-2})-2(e^2-e^{-2})+\Big[e^x+e^{-x}\Big]_0^2\right\} \\
&= \pi(e^2+5e^{-2}-2).
\end{aligned}$$

33-E-2　F ﾁｬﾚ 81　2000 産業医科大学

媒介変数 θ $\left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ を用いて,

$$x = \tan\theta, \quad y = \cos 2\theta$$

と表される曲線と x 軸で囲まれた図形を D とする.

(1) y の最大値を求めよ.

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

(1) $y = \cos 2\theta$ より,

$$\frac{dy}{d\theta} = -2\sin 2\theta$$

であるから, $-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ における y の増減は次のようになる.

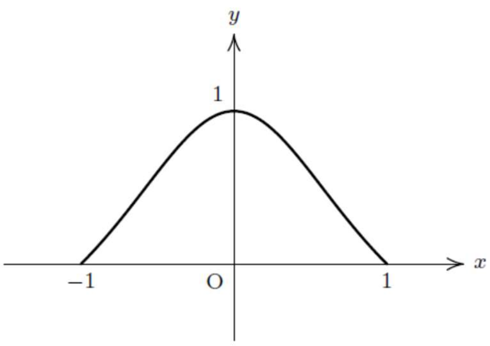
θ	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

これより, y は $\theta = 0$ のとき,

最大値 1

をとる.

(2) D を図示すると, 次の図のようになる.



D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると,
対称性より,

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_0^1 \pi y^2\, dx \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2\theta - 1)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4\cos^2\theta - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{2(1+\cos 2\theta) - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right\} d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\cos 2\theta - 2 + \frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta \\
&= 2\pi \Big[\sin 2\theta - 2\theta + \tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \pi(4 - \pi).
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{33-E-3}}$ FGE 応用

y 軸と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ と曲線 $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ とで囲まれる領域を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

$$\frac{\pi}{8}\left(e-\frac{1}{e}-2\right)$$

33-E-4 FGE 発展

n は 2 以上の整数とする．xy 平面上の $x \geqq 0$ の範囲で，直線 $y=x$ と曲線 $y=x^n$ により囲まれた図形を D_n とする．D_n を直線 $y=x$ のまわりに回転してできる回転体の体積を V_n とする．

(1) V_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ．

(1) 曲線 C : $y=x^n$ と直線 l : $y=x$ の交点のうち，原点以外の点を A とすると，

$$\mathrm{A}(1,\ 1)$$

であるから，

$$\mathrm{OA}=\sqrt{2}.$$

また，原点を通り，l に垂直な直線を m とすると，m の方程式は，

$$y=-x.$$

このとき，l を X 軸，m を Y 軸とし，$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，C 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^n)$ をとり，P から l に下ろした垂線の足を H とすると，

$$V=\int_0^{\sqrt{2}} \pi \mathrm{PH}^2\,dX.$$

ここで，

$$\mathrm{PH}=\frac{|\,t-t^n\,|}{\sqrt{2}}$$

であり，P から m に下ろした垂線の足を H$'$ とすると，

$$\begin{aligned} X&=\mathrm{PH}' \\ &=\frac{|\,t+t^n\,|}{\sqrt{2}} \\ &=\frac{t+t^n}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

であるから，

$$dX=\frac{1+nt^{n-1}}{\sqrt{2}}\,dt.$$

さらに，

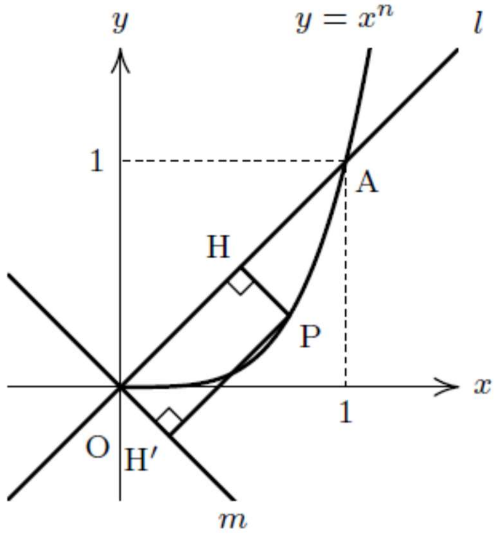
X	0	$\longrightarrow$	$\sqrt{2}$
t	0	$\longrightarrow$	1

であるから，

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^1\left(\frac{|\,t-t^n\,|}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1+nt^{n-1}}{\sqrt{2}}\,dt \\ &=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^1(t^2-2t^{n+1}+t^{2n})(1+nt^{n-1})\,dt \\ &=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^1\{t^2+(n-2)t^{n+1}+(1-2n)t^{2n}+nt^{3n-1}\}\,dt \\ &=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left[\frac{t^3}{3}+\frac{n-2}{n+2}t^{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}t^{2n+1}+\frac{t^{3n}}{3}\right]_0^1 \\ &=\frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}\pi. \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}V_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+1)(2n+1)}\pi \\ &=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi. \end{aligned}$$



33-E-5 FGE

xyz 空間において，連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1, \\ 0 \leqq y \leqq 1, \\ 0 \leqq z \leqq 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 1 \geqq 0 \end{cases}$$

の表す立体 K を考える．

K の体積を求めよ．

(1) $x^2 + y^2 + t^2 - 2xy - 1 \geqq 0$ より，

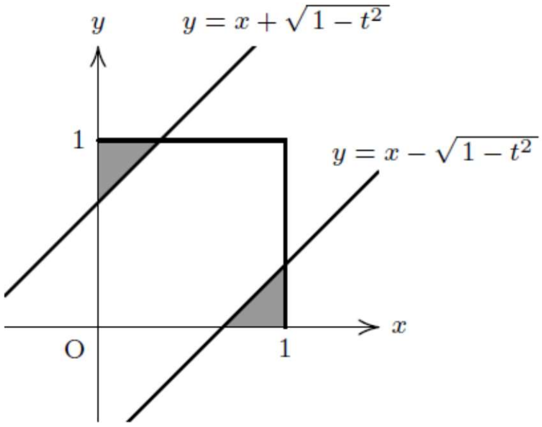
$$(y-x)^2 - (\sqrt{1-t^2}\,)^2 \geqq 0$$

$$(y - x + \sqrt{1-t^2}\,)(y - x - \sqrt{1-t^2}\,) \geqq 0$$

であるから，

$$y \leqq x - \sqrt{1-t^2}, \quad y \geqq x + \sqrt{1-t^2}.$$

$0 \leqq t \leqq 1$ であるから，断面図は次の図の網目部分である．



したがって，

$$S(t) = (1 - \sqrt{1-t^2}\,)^2.$$

(2) (1) の結果より，

$$\begin{aligned}(K \text{ の体積}) &= \int_0^1 (1 - \sqrt{1-t^2}\,)^2\,dt \\ &= \int_0^1 (2 - t^2 - 2\sqrt{1-t^2}\,)\,dt \\ &= \left[2t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt \\ &= \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$