第２３章　極座標（数Ⅲ，１講分）

A問題

23-A-1　F417A

直交座標が次のような点の，原点 O を極とする極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1)　$(\sqrt{3},\ 1)$

(2)　$(-5,\ -5)$

(3)　$(-1,\ 0)$

23-A-2　F418A

次の問に答えよ．

(1)　直交座標における方程式 $x+y-3=0$ を，原点 O を極とする極方程式で表せ．

(2)　原点 O を極とする極方程式 $r=2\sin\theta$ を，直交座標に関する方程式で表せ．

23-A-3　F418A

O を極とする極座標で表された 2 点 $\mathrm{P}\left(3\sqrt{2},\ \dfrac{\pi}{6}\right)$，$\mathrm{Q}\left(4,\ \dfrac{5}{12}\pi\right)$ があるとき，線分 PQ の長さ，および，三角形 OPQ の面積を求めよ．

B問題

23-B-1　F420B

楕円 C : $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の 2 点 P，Q が $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ を満たしながら動くものとする．ただし，O は原点である．

(1) C の，原点 O に関する極方程式を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}$ の値は一定であることを示せ．

(3) O から直線 PQ に下ろした垂線の足を R とするとき，線分 OR の長さを求めよ．

23-B-2　F421B

座標上の 2 定点 $\mathrm{A}(\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{B}(-\sqrt{2},\ 0)$ に対して，条件 $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=2$ を満たして動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える．$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4},\ r>0\right)$ とする．

(1) $r^2=4\cos 2\theta$ が成り立つことを示せ．

(2) 三角形 PAB の面積の最大値を求めよ．また，このときの点 P の座標を求めよ．

23-B-3　F422B

放物線 K : $y^2=4px$ $(p>0)$ 上に 4 点があり，それらを y 座標の大きい順に A，B，C，D とする．線分 AC と BD は放物線 K の焦点 F で垂直に交わっている．$\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ が x 軸の正の方向となす角を θ とする．

(1) 線分 AF の長さを p と θ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{1}{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}}+\dfrac{1}{\mathrm{BF}\cdot\mathrm{DF}}$ は θ によらず一定であることを示し，その値を p を用いて表せ．

C問題

23-C-1　F7C

(1) a，e を正の定数，点 A の極座標を $(a,\ 0)$ とし，A を通り始線 OX に垂直な直線を l とする．点 P から l に下ろした垂線の足を H とするとき，$e = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$ であるような点 P の軌跡の極方程式を求めよ．ただし，極を O とする．

(2) $e > 1$ のとき，(1) で求めた P の軌跡の極方程式を，直交座標に関する方程式で表せ．

(3) 双曲線 H の 2 つの弦 AB，CD が H の 1 つの焦点 F を通り，互いに直交するとき，

$$\frac{1}{\mathrm{AB}} + \frac{1}{\mathrm{CD}}$$

の値は一定であることを示せ．

23-C-2　F チャレ 53

長さ 2 の線分 OA を直径とする円の任意の接線に，O から下ろした垂線とその接線との交点を P とする．O を極，半直線 OA を始線としたときの点 P の軌跡の極方程式を求めよ．