

## 第 3 2 章 積分の応用 I (数 III, 3 講分)

### A 問題

**32-A-1** F609A

定積分  $\int_0^2 |x-1|e^x dx$  を求めよ.

**32-A-2** \* F610A

$n$  は自然数とする. 定積分  $\int_0^\pi |\sin nx + \sqrt{3} \cos nx| dx$  を求めよ.

**32-A-3** F611A

$1 < a < e$  のとき, 関数  $f(a) = \int_0^1 |e^x - a| dx$  の最小値を求めよ.

**32-A-4** F617A

曲線  $y = \frac{-2x+2}{x+1}$  と  $x$  軸,  $y$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

**32-A-5** F618A

次の図形の面積を求めよ.

- (1) 曲線  $y = e^x$  と直線  $x = 1$ ,  $x$  軸,  $y$  軸で囲まれた図形.
- (2) 曲線  $y = e^x$  と直線  $y = e^2$ ,  $y$  軸で囲まれた図形.

**32-A-6** F619A

次の図形の面積を求めよ.

- (1)  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  において, 2 曲線  $y = \sqrt{3} \tan x$ ,  $y = 2 \sin x$  で囲まれた図形.
- (2)  $0 \leq x \leq 2\pi$  において, 2 曲線  $y = \cos x$ ,  $y = \cos 2x$  で囲まれた図形.

**32-A-7** F625A

$xy$  平面において, 原点から曲線  $C : y = e^x$  に引いた接線を  $l$  とする.

- (1)  $l$  の方程式を求めよ.
- (2)  $C$ ,  $l$  と  $y$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

**32-A-8** \* F626A

曲線  $C_1 : y = ax^2$  と曲線  $C_2 : y = \log x$  はただ 1 点を共有し, その点におけるそれぞれの接線が一致しているものとする.

- (1) 定数  $a$  の値と共有点の座標を求めよ.
- (2)  $C_1$ ,  $C_2$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

**32-A-9** \* F627A

媒介変数  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) を用いて,

$$\begin{cases} x = 1 - t^4, \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

と表される曲線を  $C$  とする.

- (1)  $C$  の概形をかけ.
- (2)  $C$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

**B問題****32-B-1** F612B

$$f(t) = \int_0^1 |t-x|e^x dx \text{ とする.}$$

- (1)  $f(t)$  を求めよ.  
 (2)  $f(t)$  の最小値を求めよ.

**32-B-2** \* F613B

- (1) 自然数  $k$  に対して,  $I_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x} \sin x dx$ ,  $J_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x} \cos x dx$  とするとき,  $I_k + J_k$ ,  $I_k - J_k$  をそれぞれ  $k$  を用いて表せ.

- (2)  $n$  を自然数とするととき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x| dx$  を求めよ.

**32-B-3** \* F614B

$$\text{関数 } f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - a \cos x| dx \text{ の最小値を求めよ.}$$

**32-B-4** F620B

次の図形の面積を求めよ.

- (1) 2 曲線  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ,  $y = x^2$  で囲まれた図形の面積を求めよ.
- (2) 2 曲線  $y^2 = 4x$ ,  $x^2 = 4y$  で囲まれた図形の面積を求めよ.

**32-B-5** F621B

2 曲線  $y = x^2$ ,  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$  と  $y$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

**32-B-6** \* F622B

2 曲線  $C_1 : y = 2\sqrt{x-1}$ ,  $C_2 : y = \log(x-1) + 2$  がある.

- (1)  $C_1$ ,  $C_2$  はただ 1 つの共有点をもつことを示せ.
- (2)  $C_1$ ,  $C_2$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

**32-B-7** F628B

$xy$  平面上に、媒介変数  $\theta$   $\left(-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$  を用いて表される曲線

$$C : x = \tan \theta, \quad y = \cos 2\theta$$

がある。

- (1)  $C$  の概形をかけ。
- (2)  $C$  と  $x$  軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

**32-B-8** F629B

$t > 0$  とする。曲線  $y = \log x$  と  $x$  軸と 2 直線  $x = t$ ,  $x = t + 1$  で囲まれた図形の面積の最小値を求めよ。

**32-B-9** \* F630B

曲線  $y = \sin 2x$   $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を、曲線  $y = a \sin x$  が二等分するような定数  $a$  の値を求めよ。

**C問題****32-C-1** F615C

0以上の整数  $n$  に対して,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$  とする. ただし,  $\tan^0 x = 1$  とする.

- (1)  $I_0, I_1$  の値をそれぞれ求めよ.
- (2)  $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$  を示せ.
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$  を示せ.
- (4) 1以上の整数  $n$  に対して,

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$$

$$T_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n}$$

とするとき, および の値を求めよ.

**32-C-2** F623C

曲線  $2x^2 - 2xy + y^2 = 4$  で囲まれた図形の面積を求めよ.

**32-C-3** F624C

曲線  $y^2 = x^2(4 - x^2)$  で囲まれた図形の面積を求めよ.

**32-C-4** F チャレ 77 京都大学  
次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx$$

**32-C-5** F チャレ 78 2006 大阪大学

曲線  $C : y = x \sin^2 x$  と直線  $l : y = x$  の共有点のうち、 $x$  座標が正のものを、 $x$  座標が小さいものから順に  $A_1, A_2, A_3, \dots$  とし、第  $n$  番目のものを  $A_n$  とする.

- (1) 点  $A_n$  の  $x$  座標を求めよ. また、点  $A_n$  において、 $C$  と  $l$  は接していることを示せ.
- (2) 線分  $A_n A_{n+1}$  と  $C$  で囲まれる図形の面積を求めよ.

**32-C-6** F631C

媒介変数  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) を用いて,

$$x = \cos^3 \theta, \quad y = \sin^3 \theta$$

と表される曲線で囲まれた図形の面積を求めよ.

**32-C-7** F631C

媒介変数  $t$  を用いて,

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = 2 + t - t^2 \end{cases}$$

と表される曲線と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ.



**演習問題****32-E-1**

曲線  $C : y = \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$  と直線  $l : y = ax \ (a > 0)$  および  $y$  軸で囲まれる図形の面積を  $S_1$  とする。また、 $C$  と  $l$  および直線  $x = \frac{\pi}{2}$  で囲まれる図形の面積を  $S_2$  とし、 $S = S_1 + S_2$  とする。このとき、 $S$  の最小値を求めよ。

**32-E-2** FGE 計算問題

定積分  $\int_0^{2\pi} |5 \sin x + 12 \cos x| dx$  を求めよ。

**32-E-3** FGE 計算問題

$0 \leq t \leq 2$  のとき、関数  $f(t) = \int_0^4 |\sqrt{x} - t| dx$  の最大値、最小値を求めよ。

**32-E-4** FGE (発展)

$n$  は自然数とする。

- (1)  $1 - x + \sum_{k=1}^n (x^{3k} - x^{3k+1}) = \frac{1 - x^{3n+3}}{1 + x + x^2}$  を示せ。
- (2)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$  の値を求めよ。
- (3)  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + x + 1} dx$  とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  を求めよ。
- (4)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$  を求めよ。

**32-E-5** \* FGE

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  における関数  $f(x) = \frac{\pi}{4} \tan x$  の逆関数を  $g(x)$  とする.

このとき, 2 曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  で囲まれる図形の面積を求めよ.

**32-E-6** FGE 計算問題

3 媒介変数  $t$  ( $0 \leq t \leq 2$ ) を用いて,

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t - t^2 \end{cases}$$

と表される曲線を  $C$  とする.

- (1)  $C$  の概形をかけ.
- (2)  $C$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

**32-E-7** FGE (発展)

媒介変数  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) を用いて,

$$\begin{cases} x = \sin \theta + \cos \theta, \\ y = \sin^2 \theta \end{cases}$$

と表される曲線と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ.