２次の道具

$\boxed{\text{平方完成}}$

↓

$\boxed{\text{解の公式}}$

↓

$\boxed{\text{判別式}}$（解の公式のルート内）

↓

$\boxed{\text{解と係数の関係}}$

$1 \cdot x^2 - (\text{解の和})x + (\text{解の積}) = 0$

２次方程式の解の配置問題

解　⇔　グラフの共有点　に対応して
判別式，軸，端点　の条件を考える

（注）一区間一解なら端点のみ，一区間二解ならＤ軸端点すべて。

【例題 01】

方程式 $x^2 + (a+2)x - a + 1 = 0$ の 2 つの実数解の少なくとも 1 つが $-2 < x < 0$ の範囲にあるような定数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

最大最小問題
⇒候補を絞ってグラフで整理

【例題 02】

$0 \leq x \leq 1$ であるとき，$y = x^2 + ax + 2$ の最小値を $m(a)$，最大値を $M(a)$ とする。

（１）$m(a)$ を求めよ。

（２）$M(a)$ を求めよ。

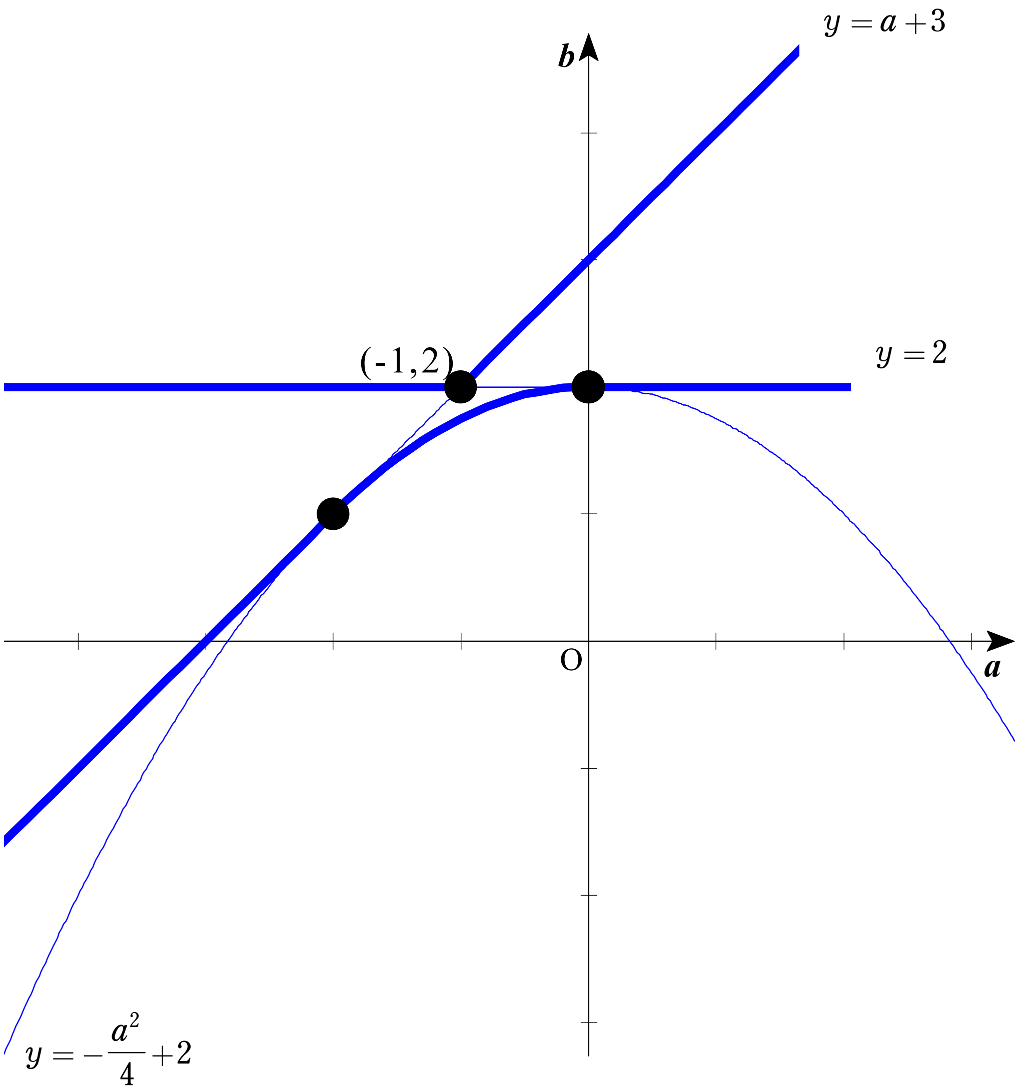
【解答】

最小値の候補は，

$$\begin{cases} \text{変域内の軸} \quad y = f\left(-\dfrac{a}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{4} + 2 \text{ ，ただし，} 0 \leq -\dfrac{a}{2} \leq 1 \text{ つまり } -2 \leq a \leq 0 \text{ のときのみ} \\ \text{左端} \quad y = f(0) = 2 \text{，右端} \quad y = f(2) = a + 3 \end{cases}$$

これらを ab 平面に図示し，最小のものを拾う。

最大値の候補は両端のみ。ここから最大のものを拾う。



関数の最大最小　二次関数に限らない一般論

基礎　グラフを描いて高さ比べ
２次関数⇒平方完成
三角関数⇒諸公式の利用
一般には⇒微分

応用　２変数以上 or 整式(n 次式)でないとき　など

（１）一文字消去（ただし変域に注意）

（２）図示して共有点の存在条件に帰着（線形計画法）

（３）文字の置き換え（変域に注意）
（対称式は和と積で，$x=\frac{b}{a}$ など）
（注）和と積の置き換えでは隠れた実解条件に注意

パラメーター表示（円・だ円・双曲線など）
$x^2+y^2=r^2$ のとき，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と表せる。（２変数⇒１変数）

（４）有名不等式の利用
（例）相加相乗，Cauchy-Schwarz の不等式など
相加相乗　$a>0, b>0$ のとき，$a+b\geq 2\sqrt{ab}$ が成立　（等号成立は $a=b$）
CS-不等式　$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\geq(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$　（等号成立は $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ のとき）
三角不等式　$|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}|$　（等号成立は $\vec{a}, \vec{b}$ が同じ向きのとき）

（５）逆手法（主役交代して，解の存在条件に帰着）

（６）（最後の手段）一文字固定

【例題 03】$x^2+y^2=2$ のもとで，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。(できるだけ多くの解法で解け)

【例題 04】正の数 a, b が $a^3+b^3=5$ を満たすとき，$a+b$ のとりうる値の範囲を求めよ。(2012 昭和)

談話室マロニエ　数学QUIZ　２次関数
（２次関数に限らず、関数の一般論を含む）

A 問題

２次関数のグラフの描き方　⇒　平方完成して，$\boxed{\text{ア}}$を求める。
上に凸か下に凸かは２次の係数の符号による。

２次の道具　①平方完成，②解の公式，③判別式，④解と係数の関係
解の公式の証明のポイントは，$\boxed{\text{イ}}$である。

x の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$\boxed{\text{ウ}}$である。
x の２次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，$\boxed{\text{エ}}$である。
この上で，２次方程式の判別式の作り方は，$\boxed{\text{オ}}$を抜き出せばよい。

B 問題

２次関数の最大・最小
下に凸の最小　⇒　場合分けのポイントは，$\boxed{\text{カ}}$である。
下に凸の最大　⇒　場合分けのポイントは，$\boxed{\text{キ}}$である。

最大最小の候補は，$\boxed{\text{ク}}$である。

一般に，関数の最大最小　⇒　グラフの y 座標比べ
方程式の解　⇒　グラフの交点の x 座標
不等式（大小関係）⇒　グラフの上下関係

C 問題

最大最小問題
（基本）２次関数なら$\boxed{\text{平方完成}}$，三角関数なら$\boxed{\text{ケ}}$など，一般には$\boxed{\text{コ}}$
（応用）① $\boxed{\text{サ}}$
② $\boxed{\text{シ}}$
③ $\boxed{\text{ス}}$
④ $\boxed{\text{セ}}$
⑤ $\boxed{\text{ソ}}$
⑥ $\boxed{\text{タ}}$

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより

標準問題

①3-標-1

x, y の関数 $f(x, y)=6x^2+6xy+3y^2-6x-4y+3$ の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ。

①3-標-2

関数 $f(x)=3x^2-2ax+1$ の区間 $-1\leq x\leq 1$ における最大値，最小値をそれぞれ求めよ。

①3-標-3（LTC）

x の関数 $f(x)=ax^2-2(a-1)x+a$ の区間 $0\leq x\leq 1$ における最小値を求めよ。

①3-標-4

すべての実数 x, y に対して，$x^2-2kxy+y^2+(k-1)y+1\geq 0$ が成り立つような定数 k の範囲を求めよ。

①$\boxed{\textbf{3-標-5}}$

実数係数の２次方程式$x^2+ax+b=0$ の２解がともに$-3<x<2$ にあるための$a,\ b$についての条件を求め，点$\left(a,\ b\right)$の存在範囲をab平面上に図示せよ。

①$\boxed{\textbf{3-標-6}}$ **（LTC）**

実数tが$0\leq t\leq 2$を満たすとき，２次方程式$x^2-2tx+2t^2-4=0$ の実数解x のとり得る値の範囲を求めよ。

①$\boxed{\textbf{3-標-7}}$ **（LTC）**

$f(x)=\left|x^2-3x\right|-x+2$とする。

(1)　x の関数$f\left(f(x)\right)$の$2\leq x\leq 4$における最大値および最小値を求めよ。

(2)　x の方程式$f\left(f(x)\right)=-1$を解け。

発展問題

①3-発-1

実数x, yが$x^2+y^2=1$を満たすとき，y^2+2axの最大値と最小値を求めよ。

①3-発-2

xを変数とする関数を$f(x)=(a+1)x^2-2x+1$とする。$0\leq x\leq 1$の範囲でこの関数の最小値は，aの関数の最小値は，aの関数で表される。これを$m(a)$とする。$m(a)$を求め，このグラフをかけ。

①3-発-3

$\left|\cos^2 x + a\sin x + b\right| \leq 3$ がすべての実数 x について成り立つような，点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

①3-発-4

$0 \leq x \leq \pi$ のとき，方程式 $\sin^2 x + p\sin x + q = 0$ が実数解をもつための (p, q) の存在領域を図示せよ。

過去問めぐり

【１】2018 福岡大学・医 難

(iii)　$-1-\sqrt{2} \leqq x \leqq 1+\sqrt{2}$ を満たす全ての x に対して $bx^2 - 2ax - b - 4 \leqq 0$ が成立する。このとき，a と b が満たす連立不等式によって表される領域の面積は $\boxed{(5)}$ であり，この領域内において $k = \dfrac{b+2-\sqrt{2}}{a+3\sqrt{2}}$ がとりうる値の範囲は $\boxed{(6)}$ である。

1 二次関数　（フジ後期テキストより）

1-1 (r1-2)

２次方程式

$$x^2-2kx+k+2=0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

について，次の問いに答えよ。ただし，kは実数とする。

(1)　$(*)$が 1 より大きい相異なる 2 つの実数解を持つような定数kの値の範囲を求めよ。

(2)　$(*)$の 2 つの実数解α，βが，$1<\alpha<2$かつ$2<\beta<3$を満たすような定数kの値の範囲を求めよ。

1-2 (j3-1)

aを実数とし，$f(x)=x^2-2x+2$，$g(x)=-x^2+ax+a$とする。

(1)　すべての実数s，tに対して，$f(s) \geqq g(t)$が成り立つようなaの値の範囲を求めよ。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$を満たすすべてのxに対して，$f(x) \geqq g(x)$が成り立つようなaの値の範囲を求めよ。

1-3 (s4-1)

実数を係数とする 2 次方程式$x^2-2ax+a+6=0$が，次の条件を満たすとき，定数aの値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　正の解と負の解をもつ。

(2)　異なる 2 つの負の解をもつ。

(3)　すべての解が 1 より大きい。

1-4 (j5-1)

実数xに対して，満たす整数nを$[\,x\,]$で表すとき，

$$4[\,x\,]^2-36[\,x\,]+45<0$$

を満たす$[\,x\,]$の範囲を求めよ。

1-5 (j11-5)

b を定数とするとき，x の 2 次関数

$$y = x^2 - 2bx - \frac{4}{3}b + \frac{5}{9} \qquad \cdots\cdots ①$$

のグラフの頂点の座標は

$$\left(b,\ \boxed{ア}b^2 - \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}b + \frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\right)$$

である。

(1) a，c は定数とする。①のグラフが関数 $y = ax^2 - 2x + c$ のグラフと原点に関して対称となるのは，$a = \boxed{カキ}$，$b = \boxed{ク}$，$c = \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ のときである。また $b = \boxed{ク}$ のとき，①のグラフと，関数 $y = x(x+4)$ のグラフを x 軸方向に s，y 軸方向に t だけ平行移動したグラフとが一致するのは

$$s = \boxed{サ},\quad t = \frac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$$

のときである。

(2) 下の $\boxed{ナ}$，$\boxed{ハ}$，$\boxed{ヒ}$ には，次の ⓪～③ のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。ただし，同じものは繰り返し選んでもよい。

⓪ $>$　　① $<$　　② $\geqq$　　③ $\leqq$　　④ $=$

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲における関数①の値の最小値を m とする。

$b < 0$ のとき $m = -\dfrac{4}{3}b + \dfrac{5}{9}$

$0 \leqq b \leqq 1$ のとき $m = \boxed{ア}b^2 - \dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}b + \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$

$b > 1$ のとき $m = -\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}b + \dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$

である。したがって $m < 0$ となる b の値の範囲は

$$b \boxed{ナ} \frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$$

である。

また，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で①のグラフと x 軸が異なる 2 点で交わる b の値の範囲は

$$\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}} \boxed{ハ} b \boxed{ヒ} \frac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘホ}}$$

である。

1-6（r19-1）〇

すべての実数xに対して不等式$4x^2-8x+19 \leqq K(x^2+1)$が成り立つような定数$K$の最小値を求めよ。

1-7（j26-1）〇

mを実数とする。関数$y=|x|(x-4)-x-m$のグラフがx軸と相異なる 3 点で交わるようなmの値の範囲を求めよ。

1-8 (r27-1)

実数 a に対して，2 次関数 $f(x)=x^2-ax-a^2+5a$ を考える．

(1) 方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ．

(2) 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ を通り，$1 \leqq \alpha < \beta \leqq 3$ となるような a の範囲を求めよ．

1-9（j28-1）〇

実数 a に対して，2 つの放物線

$$C_1 : y=2-x^2,\quad C_2 : y=x^2-4x+a$$

を考える．C_1，C_2 が $y>0$ である交点を 2 つもつような a の範囲を求めよ．

1-10（j35-1）〇

2 次関数 $y=-x^2+2ax-16$ の区間 $1 \leqq x \leqq 2$ における最大値が 0 であるとき，定数 a の値は (　　) である．

1-11　（s37-3）○

(1) x についての方程式 $x+\dfrac{1}{x}=t$ が異なる 2 つの正の解をもつような実数 t の値の範囲を求めよ．

(2) x についての 4 次方程式 $x^4-ax^3+11x^2-ax+1=0$ が異なる 4 つの正の実数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ．