第３３章　積分の応用２（数Ⅲ，２講分）

A問題

33-A-1　F633A

底から $x$cm の高さにある平面における切り口が，一辺 $x$cm の正方形となる容器がある．深さが 3cm のとき，この容器の容積を求めよ．

33-A-2　F634A

曲線 $y = e^x - 1$ と，2 直線 $x = 1$，$y = 0$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

33-A-3　F635A　＊

$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ の範囲で，曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = \cos x$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

33-A-4　F641A

xy 平面の原点から曲線 $C: y = \log x$ に引いた接線を l とし，C と l，x 軸で囲まれる図形を K とする．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) K を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(3) K を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

33-A-5　F642A 改

媒介変数 θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いて，

$$x = \sin\theta, \quad y = \sin 2\theta$$

と表される曲線と x 軸で囲まれた図形を D とする．

D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

33-A-6　＊　F643A

半径 a の半球形の容器に水が満たしてある．これを静かに 45° 傾けるとどれだけの水が流れるか．

B問題

33-B-1 F636B

$a > 0$ とする．

(1) 放物線 $y = ax^2$ と直線 $x = a$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = a^3$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ．

(3) $V_1 = V_2$ が成り立つような定数 a の値を求めよ．

33-B-2 F637B

(1) 曲線 $y = \log(x^2 + 1)$ と直線 $y = \log 2$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) 曲線 $y = \cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

33-B-3 F638B

(1) $0 < r < a$ とする．円 $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の周および内部を直線 $3x + 4y - 15 = 0$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

33-B-4　F644B

空間内の 2 点 (0，1，0)，(1，0，2) を通る直線を l とする．さらに，l を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする．

(1) 平面 $x=t$ と l との交点の座標を求めよ．

(2) M と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ．

33-B-5　(1)FGE　(2)F646B

(1) **中心 O，半径 2 の円を底面とする円柱がある．この円柱を点 O を通り，底面と 30° の角を作る平面で切ったとき，切り口の平面と底面ではさまれた立体の体積を求めよ．**

(2) 半径 $2a$，高さ a の円筒形のふたのない容器がある．底面が水平になるように容器を置き，内部に水を満たした．次に，容器を静かに 45° 傾けた．このとき，容器に残っている水の体積を求めよ．ただし，表面張力は無視する．

33-B-6　F645B

連立不等式 $x \geqq 0$，$x^2+y^2 \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq y^2$ を満たす立体の体積を求めよ．

C問題

33-C-1 F639C

放物線 $y = x^2 - x$ と直線 $l : y = x$ で囲まれた図形を，l を軸にして 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

33-C-2 F640C

$f(x) = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とする．曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，

$$V = \int_0^{\pi} 2\pi x f(x)\, dx$$

と表されることを示し，V の値を求めよ．

33-C-3 F648C

xyz 空間において，2 つの無限に長い円柱 T_1，T_2 を考える．

$$T_1=\{(x,\ y,\ z)\,|\,y^2+z^2\leqq 1\}$$

$$T_2=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+z^2\leqq 1\}$$

(1) T_1 と T_2 の共通部分の体積を求めよ．

(2) T_1 と T_2 の共通部分の表面積を求めよ．

演習問題

33-E-1　F ﾁｬﾚ 80　2002 日大

曲線 $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})\ (0 \leqq x \leqq 2)$，直線 $y=\dfrac{1}{2}(e^2+e^{-2})$ および y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

33-E-2　F ﾁｬﾚ 81　2000 産業医科大学

媒介変数 θ $\left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ を用いて，

$$x=\tan\theta,\quad y=\cos 2\theta$$

と表される曲線と x 軸で囲まれた図形を D とする．

(1)　y の最大値を求めよ．

(2)　D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

33-E-3　FGE 応用

y 軸と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ と曲線 $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ とで囲まれる領域を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

33-E-4 FGE 発展

n は 2 以上の整数とする．xy 平面上の $x \geqq 0$ の範囲で，直線 $y=x$ と曲線 $y=x^n$ により囲まれた図形を D_n とする．D_n を直線 $y=x$ のまわりに回転してできる回転体の体積を V_n とする．

(1) V_n を求めよ．

(2) $\lim_{n \to \infty} V_n$ を求めよ．

33-E-5 FGE

xyz 空間において，連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1, \\ 0 \leqq y \leqq 1, \\ 0 \leqq z \leqq 1, \\ x^2+y^2+z^2-2xy-1 \geqq 0 \end{cases}$$

の表す立体 K を考える．

K の体積を求めよ．