第３４章　積分の応用３（数Ⅲ，Ｉ講分）

Ａ問題

34-A-1　F649A

Ｏを原点とする．媒介変数 t を用いて，

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases}$$

と表された曲線を C とする．

(1)　速度ベクトル $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を求めよ．

(2)　C 上の任意の点 P における接線 l と直線 OP とのなす角を求めよ．

(3)　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ における C の長さを求めよ．

(1)　C の定め方より，

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \\ &= -e^{-t}(\cos t + \sin t), \\ \frac{dy}{dt} &= -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t \\ &= -e^{-t}(\sin t - \cos t) \end{aligned}$$

であるから，

$$\overrightarrow{v} = (\,-e^{-t}(\cos t + \sin t),\quad -e^{-t}(\sin t - \cos t)\,).$$

(2)　$\overrightarrow{v}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$$

であり，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= -e^{-2t}\cos t(\cos t + \sin t) - e^{-2t}\sin t(\sin t - \cos t) \\ &= -e^{-2t}, \\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| &= \sqrt{e^{-2t}\cos^2 t + e^{-2t}\sin^2 t} \\ &= e^{-t}, \\ |\overrightarrow{v}| &= \sqrt{e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}(\sin t - \cos t)^2} \\ &= \sqrt{2}e^{-t} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{-e^{-2t}}{\sqrt{2}e^{-t}\cdot e^{-t}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

これより，

$$\theta = \frac{3}{4}\pi$$

であるから，l と直線 OP のなす角は，

$$\frac{\pi}{4}.$$

(3)　求める長さを L とすると，

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} |\overrightarrow{v}|\,dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} e^{-t}\,dt \\ &= \sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{2}(1 - e^{-2\pi}). \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{34-A-2}}$ F650A

次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ における曲線 $y=\log(\cos x)$ の長さを求めよ．

(1) $\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}=\log(1+\sin x)-\log(1-\sin x)$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}&=\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\\&=\frac{2}{\cos x}.\end{aligned}$$

(2) $f(x)=\log(\cos x)$ とすると，

$$f'(x)=\tan x$$

であるから，

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}&=\sqrt{1+\tan^2 x}\\&=\frac{1}{|\cos x|}.\end{aligned}$$

したがって，求める曲線の長さを L とすると，

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\,dx\\&=\left[\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=\frac{1}{2}\log\frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\\&=\log(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

34-A-3 F651A（微分方程式）

$f(x) = 3x + \int_0^x f(t)\,dt$ を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = 3x + \int_0^x f(t)\,dt \qquad \cdots ①$$

において，$x = 0$ とすると，

$$f(0) = 0. \qquad \cdots ②$$

また，①の両辺を x で微分すると，

$$f'(x) = 3 + f(x)$$

であるから，

$$\frac{f'(x)}{f(x)+3} = 1.$$

これより，積分定数 C を用いて，

$$\log\{f(x)+3\} = x + C$$

であるから，

$$f(x) = e^{x+C} - 3. \qquad \cdots ③$$

②，③より，

$$e^C = 3$$

であるから，③より，

$$f(x) = 3e^x - 3.$$

B問題

34-B-1 F652B

点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として，

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

で表されている．

(1) P の速さの最大値を求めよ．

(2) $t = 0$ から $t = \pi$ までに P が描く曲線の長さを求めよ．

(1) P の速度ベクトルを $\overrightarrow{v}$ とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sin t \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{v}|^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t \\ &= 2 - 2\cos t. \end{aligned}$$

したがって，P の速さは $t = (2n-1)\pi$ （n は整数）のとき，

最大値 2

をとる．

(2) (1) より，$0 \leqq t \leqq \pi$ のとき，

$$\frac{dx}{dt} \geqq 0, \quad \frac{dy}{dt} \geqq 0$$

であるから，$t = 0$ から $t = \pi$ までに P が描く曲線の長さを L とすると，

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi} |\overrightarrow{v}|\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} 2\sin \frac{t}{2}\, dt \\ &= \left[-4\cos \frac{t}{2} \right]_0^{\pi} \\ &= 4. \end{aligned}$$

34-B-2 F653B

(1) 区間 $x \geqq 0$ における関数 $y = \sqrt{\dfrac{x}{3}}\,(1-x)$ の増減，凹凸を調べよ．

(2) 曲線 $3y^2 = x(x-1)^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さを求めよ．

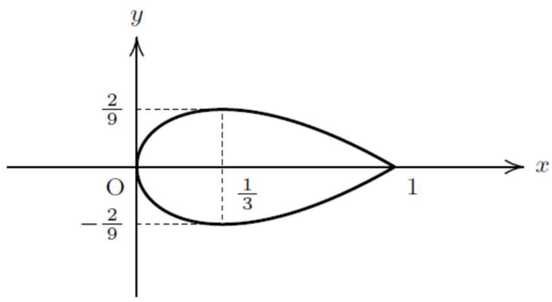
(1) $y = \sqrt{\dfrac{x}{3}}\,(1-x)$ より，

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1-x}{2\sqrt{3x}} - \sqrt{\frac{x}{3}} \\ &= \frac{1-3x}{2\sqrt{3x}}, \\ y'' &= \frac{-3\sqrt{3x} - \dfrac{1-3x}{2\sqrt{3x}}}{6x} \\ &= \frac{-15x-1}{12x\sqrt{3x}} \end{aligned}$$

であるから，$x \geqq 0$ における y の増減，凹凸は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y''		$-$	$-$	$-$
y		↗	$\frac{2}{9}$	↘

(2) (1) の結果より，$0 \leqq x \leqq 1$ における曲線 $3y^2 = x(x-1)^2$ は次のようになる．



したがって，求める長さを L とすると，

$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{(1-3x)^2}{12x}}\,dx \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{\frac{(1+3x)^2}{12x}}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right)dx \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{x} + x\sqrt{x})\right]_0^1 \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

34-B-3 F654B

(1) $\dfrac{d}{dx}\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$ の値を求めよ.

(3) 平面上を動く点 P の，時刻 t における座標は $(\cos 2t,\ 4\sin t)$ である.

点 P が $t=0$ から $t=\pi$ まで動いたとする.

(i) 点 P が動いた道のりを求めよ.

(ii) 点 P が動いてできる曲線の長さを求めよ.

(1) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ であるから,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\}\\&=\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\\&=2\sqrt{x^2+1}.\end{aligned}$$

(2) (1) の結果より,

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx&=\left[\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\}\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}.\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると,

$$\begin{cases}x=\cos 2t,\\ y=4\sin t.\end{cases}\qquad\cdots(*)$$

(i) P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とすると,

$$\vec{v}=(-2\sin 2t,\quad 4\cos t)$$

であるから,

$$\begin{aligned}|\vec{v}|&=\sqrt{4\sin^2 2t+16\cos^2 t}\\&=4\sqrt{\cos^2 t(\sin^2 t+1)}\\&=4|\cos t|\sqrt{\sin^2 t+1}.\end{aligned}$$

これより，P が動いた道のりを l とすると,

$$\begin{aligned}l&=\int_0^\pi|\vec{v}|\,dt\\&=4\int_0^\pi|\cos t|\sqrt{\sin^2 t+1}\,dt\\&=4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sqrt{\sin^2 t+1}\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos t)\sqrt{\sin^2 t+1}\,dt\right\}\\&=8\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx\\&=4\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}.\end{aligned}$$

(ii) $(*)$ より,

$$\begin{cases}x(t)=\cos 2t,\\ y(t)=4\sin t\end{cases}$$

とすると,

$$\begin{cases}x(\pi-t)=x(t),\\ y(\pi-t)=y(t)\end{cases}$$

が成り立つので，点 P が $t=0$ から $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで動く部分と，$t=\pi$ から $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで動く部分は一致する.

したがって，点 P が動いてできる曲線の長さを L とすると,

$$\begin{aligned}L&=\frac{1}{2}l\\&=2\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}.\end{aligned}$$

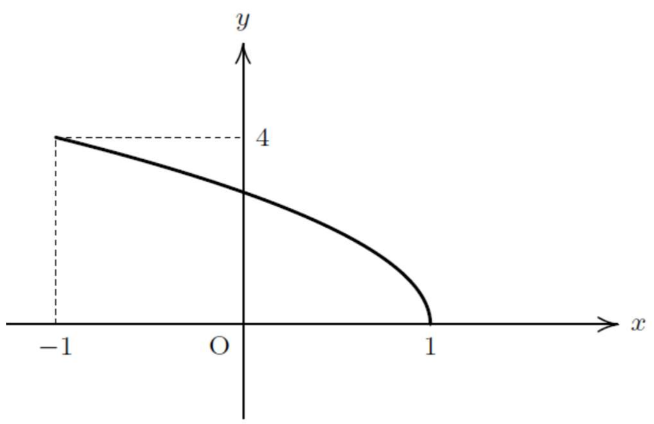
((3)(ii) の別解)

$x=1-2\sin^2 t$ であるから,

$$x=1-\frac{1}{8}y^2 \text{ かつ } 0\leqq y\leqq 4.$$

したがって,

$$\begin{aligned}L&=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy\\&=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}y\right)^2}\,dy\\&=4\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,du\\&=2\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}.\end{aligned}$$



34-B-4 F647C

曲線 $y=e^{x^2}-1$ を y 軸のまわりに 1 回転してできる空の容器に毎秒 8 の割合で水を注ぎ込む．水の深さを h とする．

(1) 水面が上昇する速度を h を用いて表せ．

(2) $h=3$ となった瞬間の水面が広がる速度を求めよ．

(1) t 秒後に水の深さが h となったとし，t 秒後の水量を V とすると，毎秒 8 の割合で水を注ぐので，

$$V=8t$$

であるから，

$$\frac{dV}{dt}=8. \quad \cdots ①$$

ここで，

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

であるから，①より，

$$\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=8. \quad \cdots ②$$

また，

$$V=\int_0^h \pi x^2\,dy$$

であり，

$$y=e^{x^2}-1$$

より，

$$x^2=\log(y+1) \quad \cdots ③$$

であるから，

$$V=\pi\int_0^h \log(y+1)\,dy.$$

両辺を h で微分すると，

$$\frac{dV}{dh}=\pi\log(h+1). \quad \cdots ④$$

②，④より，

$$\pi\log(h+1)\cdot\frac{dh}{dt}=8$$

であるから，t 秒後の水面の上昇速度は，

$$\frac{dh}{dt}=\frac{8}{\pi\log(h+1)}.$$

(2) 深さが h のとき，

$$h=e^{x^2}-1$$

であるから，

$$x^2=\log(h+1).$$

また，深さが h のときの水面の面積を S とすると，

$$S=\pi x^2$$

であるから，

$$S=\pi\log(h+1).$$

両辺を t で微分すると，

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{h+1}\cdot\frac{dh}{dt}.$$

さらに，(1) より，$h=3$ のとき，

$$\frac{dh}{dt}=\frac{8}{\pi\log 4}=\frac{4}{\pi\log 2}.$$

よって，$h=3$ となった瞬間の水面が広がる速度は，

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{3+1}\cdot\frac{4}{\pi\log 2}=\frac{1}{\log 2}.$$

C問題

34-C-1 F チャレ 82

鉛直面上にある１点を原点とし，その点を通る水平線と鉛直線をそれぞれ x 軸と y 軸とする．長さが l のしなやかで密度が一定のロープがあり，両端を $(x_0,\ y_0)$ と $(-x_0,\ y_0)$ に固定してぶら下げるとカテナリー (懸垂線) と呼ばれる曲線

$$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})+b$$

になることが知られている．ただし，$l>2x_0>0$ であり，$a>0$ と b は x_0 と y_0，および l によって決まる実数の定数である．

$l>1$ のとき，このロープの両端を長さ１のたわまない真っ直ぐな棒の両端にそれぞれ固定した．棒を水平にして地上から持ち上げ，高さが h になったときに，ロープは地上に１点で接した．また，そのとき，棒の両端では棒とロープの方向は 45° の角度をなしていた．このとき，ロープの長さ l と棒の高さ h を求めよ．

ただし，ロープと棒の太さやロープの結び目は無視できるものとする．

曲線を

$$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})+b$$

とし，2 点 $\left(\pm\frac{1}{2},\ h\right)$ を通り，原点で x 軸に接するとすると，

$$h=\frac{1}{2a}(e^{\frac{a}{2}}+e^{-\frac{a}{2}}), \qquad \cdots ①$$

$$\frac{1}{a}+b=0. \qquad \cdots ②$$

また，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})$$

であり，点 $\left(\frac{1}{2},\ h\right)$ における接線の傾きが 1 であることから，

$$\frac{1}{2}(e^{\frac{a}{2}}-e^{-\frac{a}{2}})=1. \qquad \cdots ③$$

ここで，③において，$e^{\frac{a}{2}}=t$ とすると，

$$t-\frac{1}{t}=2$$

であるから，

$$t^2-2t-1=0.$$

$t>0$ より，

$$t=1+\sqrt{2}$$

なので，

$$e^{\frac{a}{2}}=1+\sqrt{2}.$$

したがって，

$$a=2\log(1+\sqrt{2}). \qquad \cdots ④$$

①，②，④より，

$$\begin{aligned} b&=-\frac{1}{2\log(1+\sqrt{2})},\\ h&=\frac{1}{4\log(1+\sqrt{2})}\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2\log(1+\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

34-C-2 F656C（微分方程式）

点 (1，1) を通る曲線 $y=f(x)$ $(x>0)$ がある．この曲線上の任意の点 P における接線が x 軸と交わる点を Q，点 P から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R とする．

このとき，三角形 PQR の面積がつねに $\dfrac{1}{2}$ となるような減少する関数 $f(x)$ を求めよ．

曲線 $y=f(x)$ 上の点 P の座標を $(x,\ f(x))$ とすると，R の定め方より，

$$\mathrm{R}(x,\ 0).$$

また，P における接線の方程式は，

$$Y=f'(x)(X-x)+f(x)$$

であるから，$y=0$ のとき，$f'(x)<0$ より，

$$X=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

このとき，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\cdot\left|x-\left\{x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right\}\right|\cdot f(x)$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\{f(x)\}^2}{f'(x)}$$

であるから，条件より，

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\{f(x)\}^2}{f'(x)}=\frac{1}{2}.$$

これより，

$$f'(x)=-\{f(x)\}^2.$$

ここで，$y=f(x)$ より，

$$\frac{dy}{dx}=-y^2$$

であるから，

$$-\frac{1}{y^2}\,dy=dx.$$

これより，

$$\int-\frac{1}{y^2}\,dy=\int dx$$

であるから，積分定数 C を用いて，

$$\frac{1}{y}=x+C.$$

また，曲線 $y=f(x)$ が点 (1，1) を通るので，

$$C=0.$$

したがって，

$$\frac{1}{y}=x$$

であるから，

$$f(x)=\frac{1}{x}.$$

演習問題

34-E-1 FGE 発展

xy 平面において y 軸上を正の方向へネズミが一定の速さ k で走っている．時刻 $t=0$ においてネズミが原点を通過した瞬間から，点 $(1,\ 0)$ にいた猫が一定の速さでネズミを追いかけた．猫はつねにネズミに向かって走った．猫の通った跡はある関数 $f(x)$ のグラフになり，$f(x)$ は次の等式を満たしている．

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 時刻 t における猫の位置の x 座標を a とする．時刻 t におけるネズミの位置の y 座標を a を用いて表せ．

(3) a，t と k の間に成り立つ関係式を求め，$\dfrac{da}{dt}$ を a と k を用いて表せ．

(4) 猫の速度ベクトル $\overrightarrow{v}$ を a と k を用いて表し，猫の速さを求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$f(1)=0$ より，

$$f(x)=\frac{1}{3}x\sqrt{x}-\sqrt{x}+\frac{2}{3}.$$

(2) $x=a$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は，

$$y=\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)(x-a)+\frac{1}{3}a\sqrt{a}-\sqrt{a}+\frac{2}{3}$$

であるから，ねずみの位置の y 座標は $x=0$ より，

$$-\frac{1}{6}a\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{2}{3}.$$

(3) ねずみの速さが k であることから，ねずみの位置の y 座標は，

$$kt.$$

これと，(2) の結果より，

$$kt=-\frac{1}{6}a\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{2}{3}.$$

これより，

$$\begin{aligned}k\frac{dt}{da}&=-\frac{\sqrt{a}}{4}-\frac{1}{4\sqrt{a}}\\&=-\frac{a+1}{4\sqrt{a}}\end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{da}{dt}=-\frac{4k\sqrt{a}}{a+1}.$$

(4) 時刻 t における猫の位置は，

$$(a,\ \ f(a)).$$

ここで，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(a)&=\frac{d}{da}f(a)\frac{da}{dt}\\&=\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(-\frac{4k\sqrt{a}}{a+1}\right)\\&=-\frac{2k(a-1)}{a+1}\end{aligned}$$

であるから，

$$\overrightarrow{v}=-\frac{2k}{a+1}(2\sqrt{a},\ \ a-1).$$

これより，猫の速さは，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{v}|&=\left|-\frac{2k}{a+1}\right|\sqrt{(2\sqrt{a})^2+(a-1)^2}\\&=2k.\end{aligned}$$

FG655C

極方程式 $r=1+\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線の長さを求めよ.

曲線 $r=1+\cos\theta$ 上の点 P の直交座標を $(x,\ y)$ とすると,

$$\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta, \\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

であるから,

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta)$$

$$= -\sin 2\theta - \sin\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\sin^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$= \cos 2\theta + \cos\theta.$$

ここで, 点 P の速度ベクトルを $\overrightarrow{v}$ とすると,

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(-\sin 2\theta - \sin\theta)^2 + (\cos 2\theta + \cos\theta)^2}$$

$$= \sqrt{2 + 2(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta)}$$

$$= \sqrt{2 + 2\cos\theta}$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

であるから, 求める長さを L とすると,

$$L = \int_0^\pi 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi$$

$$= 4.$$