第２３章　極座標（数Ⅲ，Ｉ講分）

A問題

23-A-1　F417A

直交座標が次のような点の，原点 O を極とする極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1) $(\sqrt{3},\ 1)$

(2) $(-5,\ -5)$

(3) $(-1,\ 0)$

(1) $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 1)$ とすると，

$$\begin{aligned} r &= \mathrm{OP} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と x 軸の正の方向とのなす角は，

$$\frac{\pi}{6}$$

であるから，求める極座標は，

$$\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right).$$

(2) $\mathrm{Q}(-5,\ -5)$ とすると，

$$\begin{aligned} r &= \mathrm{OQ} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と x 軸の正の方向とのなす角は，

$$\frac{5}{4}\pi$$

であるから，求める極座標は，

$$\left(5\sqrt{2},\ \frac{5}{4}\pi\right).$$

(3) $\mathrm{R}(-1,\ 0)$ とすると，

$$\begin{aligned} r &= \mathrm{OR} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と x 軸の正の方向とのなす角は，

$$\pi$$

であるから，求める極座標は，

$$(1,\ \pi).$$

23-A-2 F418A

次の問に答えよ．

(1) 直交座標における方程式 $x+y-3=0$ を，原点 O を極とする極方程式で表せ．

(2) 原点 O を極とする極方程式 $r=2\sin\theta$ を，直交座標に関する方程式で表せ．

(1) $x+y-3=0$ に，

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

を代入すると，

$$r(\cos\theta+\sin\theta)-3=0$$

であるから，求める極方程式は，

$$\begin{aligned} r &= \frac{3}{\cos\theta+\sin\theta} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}. \end{aligned}$$

(2) $r=2\sin\theta$ の両辺に r を掛けると，

$$r^2 = 2r\sin\theta.$$

さらに，

$$\begin{cases} r^2 = x^2+y^2, \\ r\sin\theta = y \end{cases}$$

であるから，

$$x^2+y^2=2y$$

$$x^2+(y-1)^2=1.$$

したがって，求める直交座標に関する方程式は，

$$x^2+(y-1)^2=1.$$

23-A-3 F418A

O を極とする極座標で表された 2 点 $P\left(3\sqrt{2},\ \frac{\pi}{6}\right)$, $Q\left(4,\ \frac{5}{12}\pi\right)$ があるとき，線分 PQ の長さ，および，三角形 OPQ の面積を求めよ．

P，Q の定め方より，

$$\begin{cases} OP = 3\sqrt{2}, \\ OQ = 4, \\ \angle POQ = \dfrac{5}{12}\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

であるから，三角形 OPQ に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (3\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4\cdot \cos\frac{\pi}{4} \\ &= 18 + 16 - 24 \\ &= 10. \end{aligned}$$

したがって，

$$PQ = \sqrt{10}.$$

さらに，

$$\begin{aligned} \triangle OPQ &= \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4\sin\frac{\pi}{4} \\ &= 6. \end{aligned}$$

B問題

23-B-1 F420B

楕円 C : $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の 2 点 P，Q が $\angle \mathrm{POQ}=90^\circ$ を満たしながら動くものとする．ただし，O は原点である．

(1) C の，原点 O に関する極方程式を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}$ の値は一定であることを示せ．

(3) O から直線 PQ に下ろした垂線の足を R とするとき，線分 OR の長さを求めよ．

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に，

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

を代入すると，

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{9}+\frac{r^2\sin^2\theta}{4}=1$$

であるから，r^2 について解くと，

$$r^2=\frac{36}{9\sin^2\theta+4\cos^2\theta}.$$

(2) 半直線 OP の偏角を θ とすると，

$$\angle \mathrm{POQ}=90^\circ$$

より，半直線 OQ の偏角を

$$\theta+90^\circ$$

としても一般性を失わない．

さらに，(1) の結果より，

$$\frac{1}{r^2}=\frac{9\sin^2\theta+4\cos^2\theta}{36}.$$

以上より，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}\\ &=\frac{9\sin^2\theta+4\cos^2\theta}{36}+\frac{9\sin^2(\theta+90^\circ)+4\cos^2(\theta+90^\circ)}{36}\\ &=\frac{9(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{36}\\ &=\frac{13}{36}.\end{aligned}$$

(3) 三角形 OPQ の面積を S とすると，$\angle \mathrm{POQ}=90^\circ$ より，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}. \qquad \cdots ①$$

また，R の定め方より，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{OR}. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{OR}. \qquad \cdots ③$$

さらに，三平方の定理より，

$$\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2=\mathrm{PQ}^2. \qquad \cdots ④$$

③，④より，

$$\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2=\frac{\mathrm{OP}^2\times\mathrm{OQ}^2}{\mathrm{OR}^2}$$

であるから，

$$\frac{1}{\mathrm{OR}^2}=\frac{1}{\mathrm{OP}^2}+\frac{1}{\mathrm{OQ}^2}.$$

これと (1) の結果より，

$$\mathrm{OR}^2=\frac{36}{13}$$

であるから，

$$\mathrm{OR}=\frac{6}{\sqrt{13}}.$$

23-B-2 F421B

座標上の 2 定点 A$(\sqrt{2},\ 0)$, B$(-\sqrt{2},\ 0)$ に対して，条件 $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=2$ を満たして動く点 P$(x,\ y)$ を考える．$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4},\ r>0\right)$ とする．

(1) $r^2=4\cos 2\theta$ が成り立つことを示せ．

(2) 三角形 PAB の面積の最大値を求めよ．また，このときの点 P の座標を求めよ．

(1) P$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}^2&=(r\cos\theta-\sqrt{2})^2+r^2\sin^2\theta\\&=r^2-2\sqrt{2}r\cos\theta+2,\\\mathrm{PB}^2&=(r\cos\theta+\sqrt{2})^2+r^2\sin^2\theta\\&=r^2+2\sqrt{2}r\cos\theta+2\end{aligned}$$

であるから，

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=2$$

より，

$$(r^2+2-2\sqrt{2}r\cos\theta)(r^2+2+2\sqrt{2}r\cos\theta)=4$$
$$(r^2+2)^2-8r^2\cos^2\theta-4=0$$
$$r^2(r^2+4-8\cos^2\theta)=0.$$

これと，$r>0$ より，

$$\begin{aligned}r^2&=8\cos^2\theta-4\\&=8\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)-4\\&=4\cos 2\theta.\end{aligned}$$

(2) P の定め方より，

$$\angle\mathrm{AOP}=\theta$$

であり，O は線分 AB の中点であるから，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PAB}&=2\triangle\mathrm{OAP}\\&=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\sin\theta\\&=\sqrt{2}r\sin\theta.\end{aligned}$$

これと (1) より，

$$\begin{aligned}(\triangle\mathrm{PAB})^2&=2r^2\sin^2\theta\\&=8\cos 2\theta\sin^2\theta\\&=8(1-2\sin^2\theta)\sin^2\theta\\&=-16\sin^4\theta+8\sin^2\theta\\&=-16\left(\sin^2\theta-\frac{1}{4}\right)^2+1\end{aligned}$$

であるから，三角形 PAB の面積は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，

最大値 1

をとる．

このとき，(1) より，

$$r^2=2$$

であるから，

$$r=\sqrt{2}.$$

したがって，P の座標は，

$$\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{6},\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

すなわち，

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

23-B-3 F422B

放物線 K : $y^2 = 4px$ $(p > 0)$ 上に 4 点があり，それらを y 座標の大きい順に A，B，C，D とする．線分 AC と BD は放物線 K の焦点 F で垂直に交わっている．$\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ が x 軸の正の方向となす角を θ とする．

(1) 線分 AF の長さを p と θ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{1}{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}} + \dfrac{1}{\mathrm{BF}\cdot\mathrm{DF}}$ は θ によらず一定であることを示し，その値を p を用いて表せ．

(1) F の定め方より，F の座標は，

$$\mathrm{F}(p,\ 0).$$

ここで，AF $= r$ とおくと，θ の定め方より，

$$\overrightarrow{\mathrm{FA}} = r(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

であるから，

$$\mathrm{A}(p + r\cos\theta,\ r\sin\theta).$$

A が K 上にあるので，

$$r^2\sin^2\theta = 4p(p + r\cos\theta)$$

が成り立つ．

これより，

$$(1 - \cos^2\theta)r^2 - 4p\cos\theta\cdot r - 4p^2 = 0$$

であるから，

$$\{(1 + \cos\theta)r + 2p\}\{(1 - \cos\theta)r - 2p\} = 0.$$

$p > 0$，$r > 0$ より，

$$\mathrm{AF} = r = \frac{2p}{1 - \cos\theta}.$$

(2) (1) で求めた

$$r = \frac{2p}{1 - \cos\theta}$$

は F を極としたときの K の極方程式であるから，B，C，D の定め方より，

$$\begin{aligned}
\mathrm{BF} &= \frac{2p}{1 - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{2p}{1 + \sin\theta}, \\
\mathrm{CF} &= \frac{2p}{1 - \cos(\theta + \pi)} \\
&= \frac{2p}{1 + \cos\theta}, \\
\mathrm{DF} &= \frac{2p}{1 - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{2p}{1 - \sin\theta}.
\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}} + \frac{1}{\mathrm{BF}\cdot\mathrm{DF}} \\
&= \frac{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{4p^2} + \frac{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{4p^2} \\
&= \frac{1}{4p^2}
\end{aligned}$$

であるから，一定である．

C問題

23-C-1　F7C

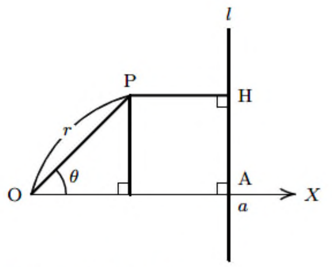
(1)　a，e を正の定数，点 A の極座標を $(a,\ 0)$ とし，A を通り始線 OX に垂直な直線を l とする．点 P から l に下ろした垂線の足を H とするとき，$e = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$ であるような点 P の軌跡の極方程式を求めよ．ただし，極を O とする．

(2)　$e > 1$ のとき，(1) で求めた P の軌跡の極方程式を，直交座標に関する方程式で表せ．

(3)　双曲線 H の 2 つの弦 AB，CD が H の 1 つの焦点 F を通り，互いに直交するとき，

$$\frac{1}{\mathrm{AB}} + \frac{1}{\mathrm{CD}}$$

の値は一定であることを示せ．



(1)　P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$$\begin{cases} \mathrm{OP} = |r|, \\ \mathrm{PH} = |a - r\cos\theta| \end{cases}$$

であるから，

$$e = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$$

のとき，

$$|r| = e|a - r\cos\theta|. \quad \cdots ①$$

(i)　$r = e(a - r\cos\theta)$ のとき，

$$(1 + e\cos\theta)r = ea$$

であり，$1 + e\cos\theta \neq 0$ であるから，

$$r = \frac{ea}{1 + e\cos\theta}. \quad \cdots ②$$

(ii)　$r = -e(a - r\cos\theta)$ のとき，

$$(1 - e\cos\theta)r = -ea$$

であるから，(i) と同様にすると，

$$r = -\frac{ea}{1 - e\cos\theta}. \quad \cdots ③$$

ここで，③より，

$$-r = \frac{ea}{1 + e\cos(\pi + \theta)}$$

であり，点 $(r,\ \theta)$ と点 $(-r,\ \pi + \theta)$ は同じ点を表すから，これは②と同じ式である．

(i)，(ii) より，P の軌跡の極方程式は，

$$r = \frac{ea}{1 + e\cos\theta}. \quad \cdots ④$$

(2)　④より，

$$r + er\cos\theta = ea$$

であるから，$r\cos\theta = x$ より，

$$r = e(a - x).$$

両辺を 2 乗すると，

$$r^2 = e^2(x - a)^2$$

であるから，$r^2 = x^2 + y^2$ より，

$$x^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2ax + a^2)$$

$$(e^2 - 1)x^2 - 2e^2ax - y^2 + e^2a^2 = 0.$$

$e \neq 1$ より，

$$(e^2 - 1)\left(x - \frac{e^2a}{e^2 - 1}\right)^2 - y^2 = \frac{e^2a^2}{e^2 - 1}$$

であるから，求める方程式は，

$$\frac{\left(x - \dfrac{e^2a}{e^2 - 1}\right)^2}{\left(\dfrac{ea}{e^2 - 1}\right)^2} - \frac{y^2}{\dfrac{e^2a^2}{e^2 - 1}} = 1.$$

(3)　4 点 A，C，B，D が反時計回りにあるとしても一般性を失わない．

(2) より，$e > 1$ のとき，④は双曲線を表す．

また，3 点 A，F，B は同一直線上であるから，$\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ と始線 OX とのなす角を θ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{FB}}$ と始線 OX とのなす角は，

$$\pi + \theta.$$

さらに，弦 AB，CD が互いに直交するから，$\overrightarrow{\mathrm{FC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ と始線 OX のなす角はそれぞれ，

$$\frac{\pi}{2} + \theta,\quad \frac{3}{2}\pi + \theta.$$

したがって，

$$\mathrm{FA} = \frac{ea}{1 + e\cos\theta}$$

のとき，④より，

$$\begin{aligned} \mathrm{FB} &= \frac{ea}{1 + e\cos(\pi + \theta)} \\ &= \frac{ea}{1 - e\cos\theta}, \\ \mathrm{FC} &= \frac{ea}{1 + e\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)} \\ &= \frac{ea}{1 - e\sin\theta}, \\ \mathrm{FD} &= \frac{ea}{1 + e\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi + \theta\right)} \\ &= \frac{ea}{1 + e\sin\theta}. \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \mathrm{FA} + \mathrm{FB} \\ &= \frac{2ea}{1 - e^2\cos^2\theta}, \\ \mathrm{CD} &= \mathrm{FC} + \mathrm{FD} \\ &= \frac{2ea}{1 - e^2\sin^2\theta} \end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{1}{\mathrm{AB}} + \frac{1}{\mathrm{CD}} = \frac{2 - e^2}{2ea}.$$

よって，$\dfrac{1}{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{\mathrm{CD}}$ は一定である．

23-C-2 F チャレ 53

長さ 2 の線分 OA を直径とする円の任意の接線に，O から下ろした垂線とその接線との交点を P とする．O を極，半直線 OA を始線としたときの点 P の軌跡の極方程式を求めよ．

O を極，半直線 OA を始線としたときの極方程式を考えるので，

$$\begin{cases} \mathrm{OP} = r, \\ \angle\mathrm{AOP} = \theta \end{cases}$$

とする．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．

接点を T とする．

T が A と一致するとき，

P は A と一致する

ので，P の極座標は，

$$(r,\ \theta) = (2,\ 0).$$

T が O と一致するとき，

P は O と一致する．

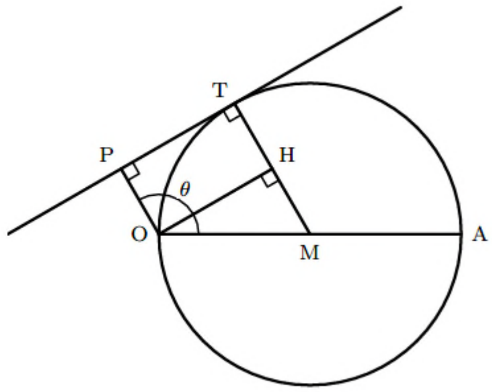
このとき，P の極座標を

$$(r,\ \theta) = (0,\ \pi)$$

と定める．

T が A または O と異なるとき，

$$0 < \theta < \pi.$$



このとき，線分 OA の中点を M，O から直線 MT に下ろした垂線の足を H とすると，

$$\begin{aligned} \mathrm{MH} &= \mathrm{OM}\cos\angle\mathrm{OMT} \\ &= \cos(\pi - \theta) \\ &= -\cos\theta. \end{aligned}$$

さらに，

$$\mathrm{HT} = r$$

であるから，$\mathrm{MT} = 1$ より，

$$-\cos\theta + r = 1.$$

これより，

$$r = 1 + \cos\theta.$$

以上より，点 P の軌跡の極方程式は，

$$r = 1 + \cos\theta.$$