第２２章　二次曲線（数Ⅲ，２講分）

Ａ問題

22-A-1　F393A

(1)　放物線 $y^2 = 8x$ の焦点の座標と準線の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

(2)　頂点が原点であり，準線の方程式が $y = \dfrac{1}{2}$ である放物線の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

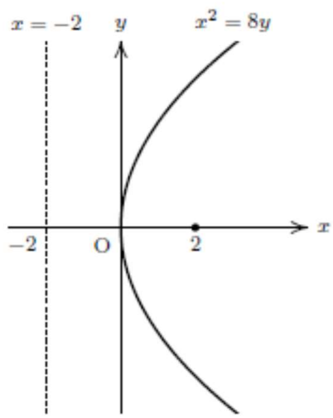
(1)　$y^2 = 4 \cdot 2x$ であるから，焦点の座標は，

$$(2,\ 0)$$

であり，準線の方程式は，

$$x = -2.$$

これを図示すると，次のようになる．



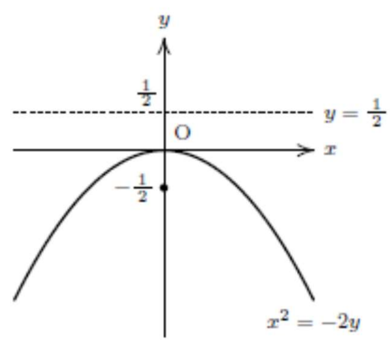
(2)　条件より，求める方程式は，

$$x^2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) y,$$

すなわち，

$$x^2 = -2y.$$

これを図示すると，次のようになる．



$\boxed{\text{22-A-2}}$ F394A

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ の焦点の座標，および，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ．また，その概形をかけ．

(2) 中心が原点，長軸が y 軸上，短軸の長さが 4，点 $(\sqrt{3},\ 2)$ を通る楕円の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ の焦点は x 軸上にあり，その x 座標は，

$$\pm\sqrt{4-3}=\pm1$$

であるから，焦点の座標は，

$$(\pm1,\ 0).$$

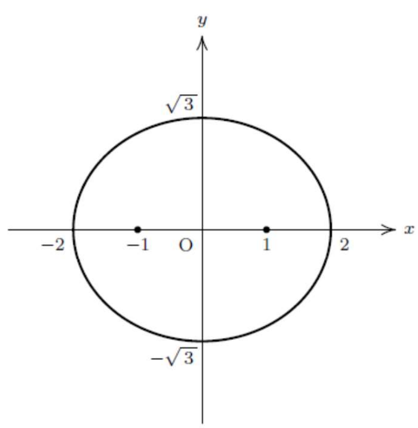
また，長軸の長さは，

$$2\times2=4.$$

さらに，短軸の長さは，

$$2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

これを図示すると，次のようになる．



(2) 中心が原点，長軸が y 軸上にあるから，$0<a<b$ を満たす実数 a，b を用いて，楕円の方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

とおける．

さらに，短軸の長さが 4 であることから，

$$2a=4 \qquad \cdots ①$$

であり，点 $(\sqrt{3},\ 2)$ を通ることから，

$$\frac{3}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1. \qquad \cdots ②$$

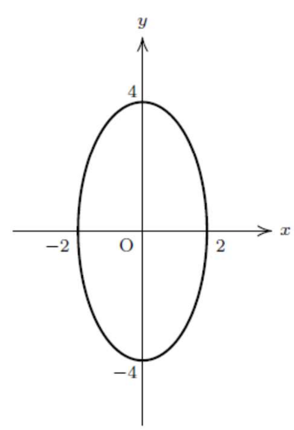
①，②，$0<a<b$ より，

$$a=2,\quad b=4$$

であることから，求める方程式は，

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1.$$

これを図示すると，次のようになる．



$\boxed{\text{22-A-3}}$ F395A

(1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ の焦点の座標，漸近線の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

(2) 漸近線の方程式が $y=2x$，$y=-2x$ で，点 $(\sqrt{2},\ 4)$ を通る双曲線の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

(1) 双曲線の焦点は x 軸上にあり，その x 座標は，

$$\pm\sqrt{9+16}=\pm 5$$

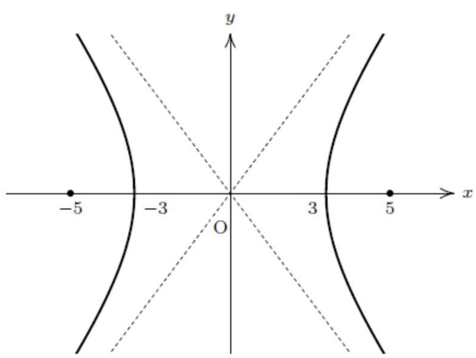
であるから，焦点の座標は，

$$(\pm 5,\ 0).$$

さらに，漸近線の方程式は，

$$y=\pm\frac{4}{3}x.$$

双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ を図示すると，次のようになる．



(2) 2 本の漸近線 $y=2x$，$y=-2x$ の交点が原点であり，通る点 $(\sqrt{2},\ 4)$ の位置から，双曲線の方程式は正の実数 a，b を用いて，

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad \cdots ①$$

とおける．

点 $(\sqrt{2},\ 4)$ を通ることから，

$$\frac{2}{a^2}-\frac{16}{b^2}=-1. \qquad \cdots ②$$

また，①の漸近線の方程式は，

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

であるから，条件より，

$$\frac{b}{a}=2. \qquad \cdots ③$$

③より，

$$b=2a. \qquad \cdots ④$$

④を②に代入して整理すると，

$$a^2=2$$

であるから，$a>0$ より，

$$a=\sqrt{2}.$$

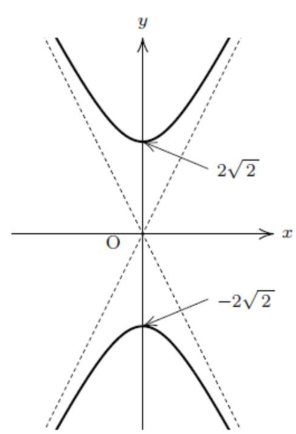
さらに，④より，

$$b=2\sqrt{2}.$$

したがって，求める方程式は，

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=-1.$$

これを図示すると，次のようになる．



$\boxed{\text{22-A-4}}$ F401A

xy 平面において，直線 $y=x+k$ が楕円 $x^2+2y^2=1$ と異なる 2 点で交わるような定数 k の値の範囲を求めよ.

直線 $y=x+k$ が楕円 $x^2+2y^2=1$ と異なる 2 点で交わるのは，x の方程式

$$x^2+2(x+k)^2=1,$$

すなわち，

$$3x^2+4kx+2k^2-1=0$$

が異なる 2 つの実数解をもつときである.

したがって，

$$(2k)^2-3(2k^2-1)>0$$

$$k^2<\frac{3}{2}$$

であるから，求める k の値の範囲は，

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}<k<\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$\boxed{\text{22-A-5}}$ F402A

次の接線の方程式を求めよ.

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $(\sqrt{3},\ -\sqrt{2})$ における接線.

(2) 放物線 $y^2=4x$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線.

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 $(\sqrt{3},\ -\sqrt{2})$ における接線の方程式は，

$$\frac{\sqrt{3}x}{6}-\frac{\sqrt{2}y}{4}=1.$$

(2) 放物線 $y^2=4x$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式は，

$$-2y=2(x+1)$$

であるから，

$$y=-x-1.$$

$\boxed{\text{22-A-6}}$　F403A

点 (3, 4) から双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=1$ に引いた接線の方程式を求めよ．

接点の座標を (s, t) とすると，

$$\frac{s^2}{2}-\frac{t^2}{4}=1. \qquad \cdots ①$$

また，接線の方程式は，

$$\frac{s}{2}x-\frac{t}{4}y=1. \qquad \cdots ②$$

②が点 (3, 4) を通る条件は，

$$\frac{3}{2}s-t=1. \qquad \cdots ③$$

③より，

$$t=\frac{3}{2}s-1 \qquad \cdots ④$$

であるから，①に代入すると，

$$\frac{s^2}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}s-1\right)^2=1$$

$$8s^2-(3s-2)^2=16$$

$$s^2-12s+20=0$$

$$(s-2)(s-10)=0$$

$$s=2,\quad 10.$$

④より，

$$s=2 \text{ のとき}, \quad t=2,$$

$$s=10 \text{ のとき}, \quad t=14.$$

②より，求める接線の方程式は，

$$x-\frac{1}{2}y=1, \quad 5x-\frac{7}{2}y=1.$$

B問題

22-B-1　F396B

次の点 P の軌跡を求めよ．

(1)　点 $(-2,\ 0)$ と直線 $x=2$ から等距離にある点 P．

(2)　2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ からの距離の和が 10 である点 P．

(3)　2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ からの距離の差が 6 である点 P．

(1)　点 $(-2,\ 0)$ と直線 $x=2$ から等距離にある点 P の軌跡は，
点 $(-2,\ 0)$ を焦点，直線 $x=2$ を準線とする放物線である．

したがって，P の軌跡は，

$$y^2=4(-2)x,$$

すなわち，

$$\text{放物線 } y^2=-8x.$$

(2)　2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ からの距離の和が 10 である点 P の軌跡は，2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ を焦点とし，長軸の長さが 10 である楕円である．

その方程式は $a>b>0$ を満たす実数 a，b を用いて，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

と表すことができる．

このとき，

$$\begin{cases} 2a=10, \\ a^2-b^2=3^2 \end{cases}$$

であるから，

$$a=5,\quad b=4.$$

したがって，点 P の軌跡は，

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

(3)　2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ からの距離の差が 6 である点 P の軌跡は，2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ を焦点とする双曲線である．

また，その方程式は，正の実数 a，b を用いて，

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

と表すことができる．

このとき，条件より，

$$\begin{cases} 2b=6, \\ a^2+b^2=5^2 \end{cases}$$

であるから，

$$a=4,\quad b=3.$$

したがって，P の軌跡は，

$$\text{双曲線 } \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1.$$

$\boxed{\text{22-B-2}}$ F397B

(1) 方程式 $x^2+4y^2+2x-8y+1=0$ で表される曲線の焦点の座標を求めよ．

(2) 漸近線の方程式が $y=x+3$，$y=-x+5$ であり，点 $(2,\ 2)$ を通る双曲線の方程式を求めよ．

(1) 方程式 $x^2+4y^2+2x-8y+1=0$ を変形すると，

$$(x+1)^2+4(y-1)^2=4$$

より，

$$\frac{(x+1)^2}{4}+(y-1)^2=1.$$

これは楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである．

ここで，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の 2 つの焦点の座標は，

$$(\pm\sqrt{3},\ 0)$$

であるから，求める焦点の座標は，

$$(\sqrt{3}-1,\ 1),\ (-\sqrt{3}-1,\ 1).$$

(2) 2 本の漸近線 $y=x+3$，$y=-x+5$ の交点の座標が $(1,\ 4)$ であり，傾きが ±1 であること，さらに，通る点 $(2,\ 2)$ の位置から，求める双曲線の方程式は，正の実数 a を用いて，

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-4)^2}{a^2}=-1$$

と表すことができる．

これが点 $(2,\ 2)$ を通る条件は，

$$\frac{1}{a^2}-\frac{4}{a^2}=-1$$

であるから，

$$a^2=3.$$

$a>0$ より，

$$a=\sqrt{3}$$

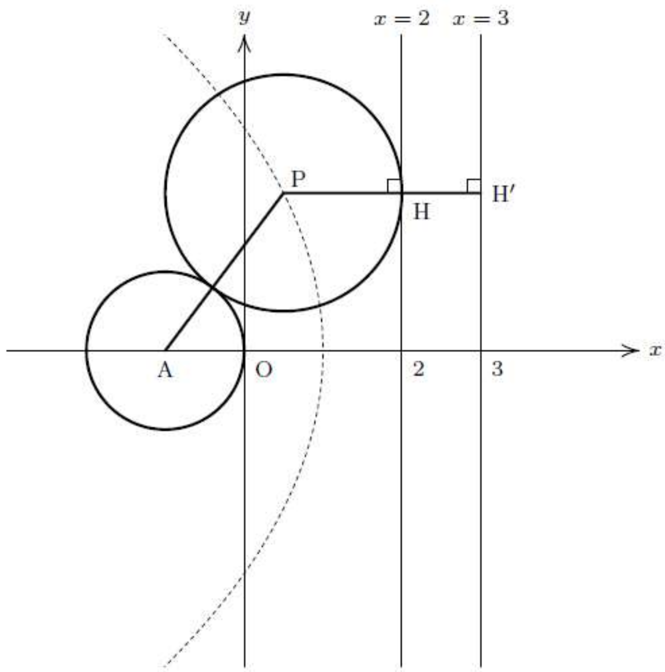
であるから，求める方程式は，

$$\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y-4)^2}{3}=-1.$$

$\boxed{\text{22-B-3}}$ F398B

直線 $x=2$ に接し，円 $(x+1)^2+y^2=1$ と外接する円の中心の軌跡を求めよ．

直線 $x=2$ に接し，円 C_1 : $(x+1)^2+y^2=1$ と外接する円 C_2 の中心を P，半径を r とする．



さらに，C_1 の中心を A とし，P から直線 $x=2$，$x=3$ に下ろした垂線の足をそれぞれ H，H′ とすると，

$$\begin{cases} \mathrm{AP}=1+r, \\ \mathrm{PH}=r, \\ \mathrm{PH'}=r+1 \end{cases}$$

であるから，

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PH'}$$

が成り立つ．

したがって，P の軌跡は，点 A$(-1,\ 0)$ を焦点，直線 $x=3$ を準線とする放物線である．

この放物線の頂点は 2 点 A，$(3,\ 0)$ を結ぶ線分の中点 $(1,\ 0)$ であるから，放物線 $y^2=4px$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである．

また，平行移動前の放物線 $y^2=4px$ の焦点の座標は $(-2,\ 0)$ であるから，

$$p=-2.$$

したがって，求める軌跡は，

$$y^2=4(-2)(x-1),$$

すなわち，

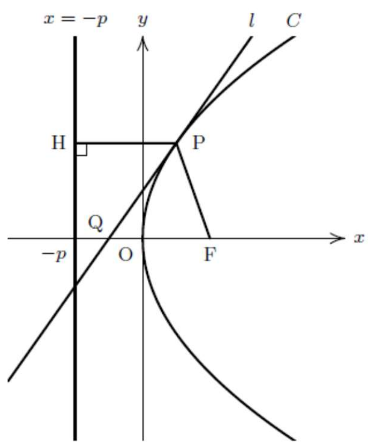
$$\text{放物線 } y^2=-8(x-1).$$

$\boxed{\text{22-B-4}}$ F404B

放物線 C : $y^2 = 4px$ $(p > 0)$ 上の頂点以外の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線を l とする．C の焦点を F，さらに点 P から準線に下ろした垂線を PH とする．l は $\angle\mathrm{HPF}$ を二等分することを示せ．

C の焦点の座標は $(p,\ 0)$ であり，準線の方程式は $x = -p$ である．
したがって，

$$\mathrm{F}(p,\ 0),\quad \mathrm{H}(-p,\ y_1).$$



ここで，$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ が放物線 C : $y^2 = 4px$ 上にあるから，

$$y_1{}^2 = 4px_1 \qquad \cdots ①$$

であり，l の方程式は，

$$y_1 y = 2p(x + x_1).$$

よって，l と x 軸との交点を Q とすると，

$$\mathrm{Q}(-x_1,\ 0).$$

さらに，

$$\text{直線 } \mathrm{PH} \parallel x \text{ 軸}$$

であるから，

$$\angle\mathrm{HPQ} = \angle\mathrm{FQP}. \qquad \cdots ②$$

また，

$$\begin{aligned}\mathrm{FQ} &= p - (-x_1)\\ &= p + x_1\\ &= \mathrm{PH}\\ &= \mathrm{FP} \qquad \text{(放物線の性質より)}\end{aligned}$$

であるから，

$$\mathrm{FQ} = \mathrm{FP}.$$

これより，

$$\angle\mathrm{FQP} = \angle\mathrm{FPQ}. \qquad \cdots ③$$

②，③より，

$$\angle\mathrm{HPQ} = \angle\mathrm{FPQ}$$

であるから，l は $\angle\mathrm{HPF}$ を二等分する．

$\boxed{\text{22-B-5}}$ F405B

Oを原点とする座標平面において，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点Pにおける接線と2本の漸近線との交点をQ，Rとする．

(1) Pは線分QRの中点であることを示せ．

(2) 三角形OQRの面積はPの位置によらず一定であることを示せ．

(1) Pの座標を $(s,\ t)$ とすると，接線の方程式は，

$$\frac{sx}{a^2}-\frac{ty}{b^2}=1. \quad \cdots ①$$

また，2本の漸近線の方程式は，

$$y=\frac{b}{a}x, \quad \cdots ②$$

$$y=-\frac{b}{a}x. \quad \cdots ③$$

①，②より，

$$\frac{sx}{a^2}-\frac{tx}{ab}=1$$

であるから，

$$(bs-at)x=a^2b$$

$$x=\frac{a^2b}{bs-at}. \quad \cdots ④$$

①，③より，同様にすると，

$$x=\frac{a^2b}{bs+at}. \quad \cdots ⑤$$

ここで，

$$2I=\frac{a^2b}{bs-at}+\frac{a^2b}{bs+at}$$

とすると，

$$I=\frac{a^2b^2s}{b^2s^2-a^2t^2}=\frac{s}{\dfrac{s^2}{a^2}-\dfrac{t^2}{b^2}}.$$

さらに，点 $(s,\ t)$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点であるから，

$$\frac{s^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}=1. \quad \cdots ⑥$$

したがって，

$$I=s$$

であるから，Pは線分QRの中点である．

(2) ②，③，④，⑤より，Q，Rの座標は，

$$\left(\frac{a^2b}{bs-at},\ \frac{ab^2}{bs-at}\right),\ \left(\frac{a^2b}{bs+at},\ -\frac{ab^2}{bs+at}\right).$$

これより，

$$\triangle\mathrm{OQR}=\frac{1}{2}\left|\frac{a^3b^3}{b^2s^2-a^2t^2}\cdot 2\right|=\left|\frac{ab}{\dfrac{s^2}{a^2}-\dfrac{t^2}{b^2}}\right|$$

であるから，⑥より，

$$\triangle\mathrm{OQR}=ab$$

となり，一定である．

$\boxed{\text{22-B-6}}$ F407B

楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 P から引いた 2 本の接線が直交するような P の軌跡を求めよ．

楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ を C とする．

P$(a,\ b)$ の位置で場合分けをする．

(ｉ)　$a=\sqrt{17}$ のとき，P から C に引いた接線の 1 つは，

$$x=\sqrt{17}$$

であるから，もう 1 つの接線は，

$$y=2\sqrt{2} \text{ または } y=-2\sqrt{2}.$$

したがって，P のこれらの交点であるから，P の座標は，

$$\mathrm{P}(\sqrt{17},\quad \pm 2\sqrt{2}).$$

(ii)　$a=-\sqrt{17}$ のときも (ｉ) と同様に考えて，P の座標は，

$$\mathrm{P}(-\sqrt{17},\quad \pm 2\sqrt{2}).$$

(iii)　$a\neq\pm\sqrt{17}$ のとき，P を通る直線の方程式は，

$$y=m(x-a)+b \qquad \cdots ①$$

とおける．

①が C に接する条件は，

$$\frac{x^2}{17}+\frac{1}{8}\{m(x-a)+b\}^2=1,$$

すなわち，

$$(8+17m^2)x^2-34m(ma-b)x+17\{(ma-b)^2-8\}=0 \quad \cdots ②$$

が重解をもつことである．

さらに，

$$(②\text{の判別式})=0$$

より，

$$\{17m(ma-b)\}^2-(8+17m^2)\cdot 17\{(ma-b)^2-8\}=0.$$

整理すると，

$$(17-a^2)m^2+2abm+8-b^2=0. \qquad \cdots ③$$

ここで，P から C に引いた (y 軸に平行でない)2 本の接線が直交する条件は，③の 2 つの解を m_1，m_2 とすると，

$$m_1m_2=-1.$$

解と係数の関係より，

$$\frac{8-b^2}{17-a^2}=-1$$

であるから，

$$a^2+b^2=25.$$

(ｉ)，(ii)，(iii) より，P の軌跡は，

$$\text{円}:x^2+y^2=25.$$

22-B-7　F413B

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接し，x 軸，y 軸に平行な辺をもつ長方形の面積の最大値を求めよ．

第 1 象限における楕円上の点を

$$P(3\cos\theta,\ 2\sin\theta) \qquad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とし，P を 1 つの頂点とする長方形の面積 S について考えればよい．

$$\begin{aligned} S &= (3\cos\theta\times 2)\times(2\sin\theta\times 2) \\ &= 24\sin\theta\cos\theta \\ &= 12\sin 2\theta. \end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$0<2\theta<\pi$$

であるから，

$$0<\sin 2\theta \leqq 1.$$

したがって，長方形の面積の最大値は，

$$12.$$

$\boxed{\text{22-B-8}}$ E

直線 $y = 2x + 1$ と楕円 $4x^2 + y^2 = 4$ の 2 つの交点を A，B とする．

(1) 線分 AB の中点の座標を求めよ．

(2) 線分 AB の長さを求めよ．

(1) $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)$

(2) $\frac{\sqrt{35}}{2}$

$\boxed{\text{22-B-9}}$ E

放物線 $y = \frac{3}{4}x^2$ と楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ の共通接線の方程式を求めよ．

$$y = \pm 2\sqrt{3}x - 4$$

C問題

22-C-1　F399C 改

双曲線C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上の点任意の点 P から，$C$の 2 本の漸近線に下ろした推薦の足を，Q，R とする。このとき席 PQ・PR は一定であることを示し，その値を定数a, bの式で表せ。

C 上の点 P の座標を $(p,\ q)$ とすると，

$$p^2-q^2=1. \qquad \cdots (*)$$

また，C の 2 本の漸近線の方程式は，

$$\begin{cases} y=x, \\ y=-x. \end{cases}$$

P から直線 $y=x$ に下ろした垂線の足 Q は，2 直線

$$\begin{cases} y=x, \\ y=-x+p+q \end{cases}$$

の交点であるから，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p+q}{2}\right).$$

また，P から直線 $y=-x$ に下ろした垂線の足 R は，2 直線

$$\begin{cases} y=-x, \\ y=x-p+q \end{cases}$$

の交点であるから，

$$\mathrm{R}\left(\frac{p-q}{2},\ -\frac{p-q}{2}\right).$$

したがって，

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= \left(p-\frac{p+q}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p+q}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(p-q)^2, \\ \mathrm{PR}^2 &= \left(p-\frac{p-q}{2}\right)^2+\left(q+\frac{p-q}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(p+q)^2 \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR} &= \frac{1}{2}|\,p-q\,||\,p+q\,| \\ &= \frac{1}{2}|\,p^2-q^2\,|. \end{aligned}$$

$(*)$ より，

$$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\frac{1}{2}$$

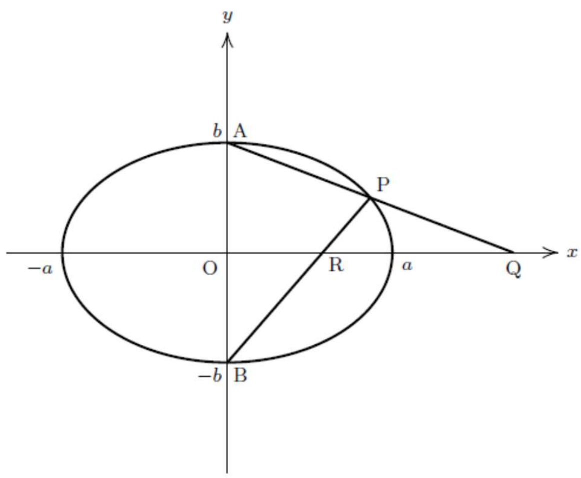
であるから，PQ $\cdot$ PR は一定である.

$\boxed{\text{22-C-2}}$ F400C

楕円 C の中心を O，短軸の両端を A，B とし，長軸が直線 l 上にあるとする．C 上の A，B 以外の任意の点を P とし，直線 AP，BP と，l との交点をそれぞれ Q，R とする．

このとき，積 $\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}$ は一定であることを示せ．

楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ とすると，短軸の両端は A$(0,\ b)$，B$(0,\ -b)$ であり，長軸は x 軸上にある．



また，P の座標を $(s,\ t)$ とすると，P の定め方より，

$$s\neq 0\text{ かつ }t\neq b\text{ かつ }t\neq -b.$$

このとき，

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1. \qquad \cdots ①$$

さらに，直線 AP の方程式は，

$$y=\frac{t-b}{s}x+b. \qquad \cdots ②$$

②において，$y=0$ とすると，

$$x=\frac{bs}{b-t}$$

であるから，Q の座標は，

$$\left(\frac{bs}{b-t},\ 0\right).$$

また，直線 BP の方程式は，

$$y=\frac{t+b}{s}x-b. \qquad \cdots ③$$

③において，$y=0$ とすると，

$$x=\frac{bs}{b+t}$$

であるから，R の座標は，

$$\left(\frac{bs}{b+t},\ 0\right).$$

したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}&=\left|\frac{b^2s^2}{(b-t)(b+t)}\right|\\&=\left|\frac{b^2s^2}{b^2-t^2}\right|. \qquad \cdots ④\end{aligned}$$

ここで，①より，

$$s^2=\frac{a^2(b^2-t^2)}{b^2}$$

であるから，④より，

$$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=a^2$$

であるから，$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}$ は一定である．

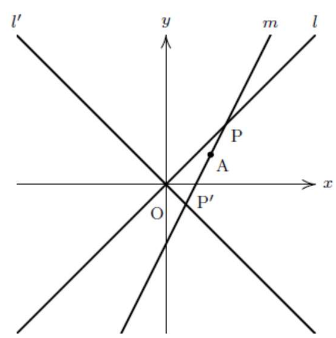
$\boxed{\text{22-C-3}}$ F チャレ 50 大阪大学

直線 $y = x$ を l で，直線 $y = -x$ を l' で表す．

直線 l，l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる．点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P$'$ で交わるとする．点 Q を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

を満たすようにとる．ただし，O は xy 平面の原点である．直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線になることを示せ．



点 Q の座標を $(X,\ Y)$ とする．

また，P，P$'$ はそれぞれ l，l' 上の点であるから，実数 s，t を用いて，

$$\mathrm{P}(s,\ s),\ \mathrm{P'}(t,\ -t) \qquad \cdots ①$$

とおける．

さらに，A は l，l' のどちらにもない点であるから，

$$a \neq b \text{ かつ } a \neq -b. \qquad \cdots ②$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と①より，

$$(s,\ s) + (t,\ -t) = (a,\ b) + (X,\ Y)$$

であるから，

$$\begin{cases} s + t = a + X, \\ s - t = b + Y. \end{cases} \qquad \cdots ③$$

さらに，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (s - a,\ s - b),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP'}} = (t - a,\ -t - b)$$

であり，3 点 A，P，P$'$ が同一直線上にあることから，

$$(s - a)(-t - b) - (s - b)(t - a) = 0.$$

これより，

$$2st - a(s + t) + b(s - t) = 0. \qquad \cdots ④$$

ここで，③より，

$$\begin{cases} s = \dfrac{(X + a) + (Y + b)}{2}, \\ t = \dfrac{(X + a) - (Y + b)}{2} \end{cases}$$

であるから，③，④より，

$$\frac{1}{2}\{(X + a)^2 - (Y + b)^2\} - a(X + a) + b(Y + b) = 0$$

$$X^2 - Y^2 = a^2 - b^2. \qquad \cdots ⑤$$

さらに，②より，$a^2 - b^2 \neq 0$ であるから，⑤より，

$$\frac{X^2}{a^2 - b^2} - \frac{Y^2}{a^2 - b^2} = 1. \qquad \cdots ⑥$$

⑥より，Q は 2 直線 $y = x$，$y = -x$ を漸近線とする双曲線であり，この双曲線上の任意の点は条件を満たす．

したがって，Q の軌跡は l，l' を漸近線とする双曲線である．

$\boxed{\text{22-C-4}}$ F チャレ 52　2008 信州大学

曲線 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ $(x>0,\ y>0)$ 上の動点 P における接線と，x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q，R とする．このとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ．

点 P の座標を $(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，P における接線の方程式は，

$$\frac{\cos\theta}{2}x+\sin\theta\cdot y=1$$

であるから，Q，R の座標はそれぞれ，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{2}{\cos\theta},\ 0\right),\quad \mathrm{R}\left(0,\ \frac{1}{\sin\theta}\right).$$

このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}^2&=\frac{4}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\\&=4(1+\tan^2\theta)+1+\frac{1}{\tan^2\theta}\\&=5+4\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}.\end{aligned}$$

ここで，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$4\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}\geqq 2\sqrt{4\tan^2\theta\cdot\frac{1}{\tan^2\theta}}$$

であるから，

$$\mathrm{QR}^2\geqq 9.$$

$$\left(\text{等号は } \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき成り立つ}\right)$$

したがって，線分 QR の長さの最小値は，

$$\text{最小値}\sqrt{f\left(\frac{8}{3}\right)}=3.$$

また，$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\\[2mm]\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

であるから，P の座標は，

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

(別解)

点 P の座標を $(s,\ t)$ $(0 < s < 2,\ 0 < t < 1)$ とすると，P における接線の方程式は，

$$\frac{sx}{4} + ty = 1$$

であるから，Q，R の座標はそれぞれ，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{4}{s},\ 0\right),\quad \mathrm{R}\left(0,\ \frac{1}{t}\right).$$

また，

$$\frac{s^2}{4} + t^2 = 1. \qquad \cdots ①$$

このとき，

$$\mathrm{QR}^2 = \frac{16}{s^2} + \frac{1}{t^2}. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$\mathrm{QR}^2 = \frac{16}{s^2} + \frac{4}{4 - s^2}.$$

ここで，$s^2 = x$ とし，

$$f(x) = \frac{16}{x} + \frac{4}{4 - x}$$

とすると，$0 < x < 4$ であり，

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{16}{x^2} + \frac{4}{(4 - x)^2} \\ &= -\frac{4(x - 8)(3x - 8)}{x^2(4 - x^2)}. \end{aligned}$$

これより，$0 < x < 4$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	(4)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって，$f(x)$ は $x = \dfrac{8}{3}$ のとき，最小となる．

以上より，線分 QR の長さの最小値は，

$$最小値 \sqrt{f\left(\frac{8}{3}\right)} = 3$$

であり，P の座標は，

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

(別解終り)

演習問題

22-E-1　E

長さ 9 の線分 AB の両端 A，B が，それぞれ x 軸上，y 軸上を動くとき，線分 AB を 1 : 2 に内分する点 P の軌跡を求めよ．

$\boxed{\text{22-E-2}}$ F406C

座標平面上に，双曲線 $C: x^2-y^2=1$ と点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ がある．点 A を通る直線 l が双曲線 C と相異なる 2 点で交わるとき，この 2 交点の中点 P は曲線 $(x-1)^2-y^2=1$ 上にあることを証明せよ．

l が y 軸に平行なとき，l と C の 2 交点の中点 P は A と一致し，これは曲線 $C': (x-1)^2-y^2=1$ 上にある．

l が y 軸に平行でないとき，

$$l: y=m(x-2)$$

とおけ，C の方程式と連立すると，

$$x^2-\{m(x-2)\}^2=1$$

であるから，

$$(m^2-1)x^2-4m^2x+4m^2+1=0. \qquad \cdots (*)$$

ここで，l が C と異なる 2 点で交わる条件は，$(*)$ が異なる 2 つの実数解をもつことであるから，

$$m^2-1\neq 0$$

であることが必要．

このとき，$(*)$ の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(2m^2)-(m^2-1)(4m^2+1)\\&=3m^2+1>0\end{aligned}$$

であるから，$(*)$ は異なる 2 つの実数解をもつ．

それらを α，β とすると，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=\frac{4m^2}{m^2-1}.$$

ここで，$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，

$$\begin{aligned}X&=\frac{\alpha+\beta}{2}\\&=\frac{2m^2}{m^2-1},\\Y&=m(X-2)\\&=m\left(\frac{2m^2}{m^2-1}-2\right)\\&=\frac{2m}{m^2-1}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}(X-1)^2-Y^2&=\left(\frac{2m^2}{m^2-1}-1\right)^2-\left(\frac{2m}{m^2-1}\right)^2\\&=\frac{(m^2+1)^2-(2m)^2}{(m^2-1)^2}\\&=1.\end{aligned}$$

したがって，P は C' 上にある．

$\boxed{\text{22-E-3}}$　F チャレ 51　2007 筑波大学

xy 平面上で，2 次曲線 C : $x^2+ay^2+by=0$ が直線 L : $y=2x-1$ に点 P で接している．ただし，$a \neq -\dfrac{1}{4}$, $b \neq 0$ とする．

(1) a と b の関係式を求めよ．

(2) C が楕円，放物線，双曲線となるそれぞれの場合に，b の値の範囲を求めよ．

(3) C が楕円になる場合の接点 P の存在範囲を求め，xy 平面上に図示せよ．

(1)　C, L の式を連立すると，

$$x^2+a(2x-1)^2+b(2x-1)=0$$

であるから，

$$(4a+1)x^2-2(2a-b)x+a-b=0. \quad \cdots ①$$

$a \neq -\dfrac{1}{4}$ であるから，①は x の 2 次方程式である．

したがって，C と L が接する条件は，

$$(①の判別式)=0$$

であるから，

$$(2a-b)^2-(4a+1)(a-b)=0.$$

これより，求める a と b の関係式は，

$$a=b^2+b. \quad \cdots ②$$

ただし，$a \neq -\dfrac{1}{4}$, $b \neq 0$.

(2)　a の値で場合分けをする．

(i)　$a=0$ のとき，②と $b \neq 0$ より，

$$b=-1$$

であるから，C は，

$$y=x^2.$$

したがって，C は放物線．

(ii)　$a \neq 0$ のとき，②より，

$$b \neq 0 \text{ かつ } b \neq -1.$$

さらに，②において，$a \neq -\dfrac{1}{4}$ より，

$$b \neq -\frac{1}{2}.$$

以上の条件のもとで，C の方程式は，

$$x^2+a\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}$$

$$\frac{x^2}{\frac{b^2}{4a}}+\frac{\left(y+\frac{b}{2a}\right)^2}{\frac{b^2}{4a^2}}=1 \quad \cdots ③$$

と変形できる．

a の符号で場合分けをする．

(ア)　$a>0$ のとき，②より，

$$b<-1,\quad 0<b.$$

③より，C は楕円を表す．

(イ)　$a<0$ のとき，②より，

$$-1<b<0.$$

③より，C は双曲線を表す．

以上より，

C が楕円となるのは，　$b<-1$, $0<b$ のとき，
C が放物線となるのは，　$b=0$ のとき，
C が双曲線となるのは，　$-1<b<-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}<b<0$ のとき．

(3)　接点は直線 L 上にある．そのどの部分に存在するかを考える．

(2) の結果より，C が楕円となる条件は，

$$b<-1,\quad 0<b. \quad \cdots ④$$

また，接点 P の x 座標は，①の重解であるから，

$$x=\frac{2a-b}{4a+1}.$$

②を代入すると，

$$\begin{aligned} x &= \frac{2(b^2+b)-b}{4(b^2+b)+1} \\ &= \frac{b(2b+1)}{(2b+1)^2} \\ &= \frac{1}{2+\frac{1}{b}}. \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

④より，

$$-1<\frac{1}{b}<0,\quad 0<\frac{1}{b}$$

であるから，

$$1<2+\frac{1}{b}<2,\quad 2<2+\frac{1}{b}.$$

したがって，

$$0<\frac{1}{2+\frac{1}{b}}<\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<\frac{1}{2+\frac{1}{b}}<1$$

であるから，⑤より，

$$0<x<\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<x<1.$$

以上より，P の存在範囲は，

直線 $y=2x-1$ の $0<x<\dfrac{1}{2}$ または $\dfrac{1}{2}<x<1$ を満たす部分．

これを図示すると，次の図の実線部分である．