数学　第２回小テスト　解答解説

$\boxed{1}$ 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-2x-3\ (-4\leqq x\leqq 0)$　　(2)　$y=2x^2-4x-6\ (0\leqq x\leqq 3)$

$\boxed{2}$ 次の２次不等式を解け。

(1)　$3x^2+5x-2\geqq 0$　　(2)　$2x^2-x<5$

$\boxed{3}$ 放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，点 $(1,\ 3)$ を通り，その頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ そのグラフが，次のような放物線となる２次関数を求めよ。
頂点が点 $(-1,\ 3)$ で，点 $(1,\ 7)$ を通る放物線

$\boxed{5}$ 不等式 $ax^2+bx+4>0$ の解が $-1<x<2$ であるように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{6}$ x のすべての実数の値に対して $(k^2-1)x^2+2(k+1)x+3>0$ が成り立つように，k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{7}$ $-1\leqq x\leqq 1$ のすべての値に対して，$x^2-2ax-a+6\geqq 0$ が常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{8}$ ２次方程式 $x^2+kx+2k-1=0$ の２つの解がともに -2 と 5 の間にあるように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{9}$ ２次不等式 $ax^2+(a-1)x+a-1>0$ がすべての実数 x で成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{10}$ ２次方程式 $x^2-(8-a)x+12-ab=0$ がどんな a の値に対しても実数解をもつような定数 b の値の範囲を求めよ。

$\boxed{11}$ a を定数とし，２次関数 $y=-4x^2+4(a-1)x-a^2$ のグラフを C とする．

(1)　C が点 $(1,\ -4)$ を通るとき，$a=$ $^{ア}\boxed{}$ である．

(2)　C の頂点の座標は $\left(\dfrac{a-1}{^{イ}\boxed{}},\ {}^{ウエ}\boxed{}\,a+{}^{オ}\boxed{}\right)$ である．

(3)　$a>1$ とする．x が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲にあるとき，この２次関数の最大値，最小値を調べる．

最大値は　$1<a\leqq{}^{カ}\boxed{}$ ならば　$-2a+{}^{キ}\boxed{}$

$a>{}^{カ}\boxed{}$　ならば　$-a^2+4a-{}^{ク}\boxed{}$　である．

また，最小値は　$-a^2-{}^{ケ}\boxed{}\,a$　である．

最大値と最小値の差が 12 になるのは $a=-1+{}^{コ}\boxed{}\sqrt{{}^{サ}\boxed{}}$ のときである．

【配点】

1　各5点計10点

2　各5点計10点

3　10点

4　10点

5　10点

6　10点

7　10点

8　10点　等号のあるなしのミスは2点減点。

9　10点

10　10点　BASIC＋STANDARDの合計100点

11　(ア)　5点　(イウエオ)　完答5点　(カキクケ)　完答5点　(コサ)完答5点

実戦問題計20点

1　解答　(1)　$x=-4$ のとき最大値 21，$x=0$ のとき最小値 -3

(2)　$x=3$ のとき最大値 0，$x=1$ のとき最小値 -8

2　解答　(1)　$x \leqq -2,\ \dfrac{1}{3} \leqq x$　　(2)　$\dfrac{1-\sqrt{41}}{4} < x < \dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$

3　解答　$y=2(x+1)^2-5,\ y=2(x-2)^2+1$

($y=2x^2+4x-3,\ y=2x^2-8x+9$ でもよい)

4　解答　(1)　$y=(x+1)^2+3$　$[y=x^2+2x+4]$

5　解答　$a=-2,\ b=2$

6　解答　$k \leqq -1,\ 2<k$

7　解答　$-7 \leqq a \leqq \dfrac{7}{3}$

8　解答　$-\dfrac{24}{7} < k \leqq 4-2\sqrt{3}$

9　解答　$a>1$

10　解答　$2 \leqq b \leqq 6$

11　解答　(ア)　2　(イ)　2　(ウエ)　-2　(オ)　1　(カ)　3　(キ)　1　(ク)　8

(ケ)　4　(コ)$\sqrt{(サ)}$　$2\sqrt{3}$

$\boxed{1}$ (1) $y=x^2-2x-3$

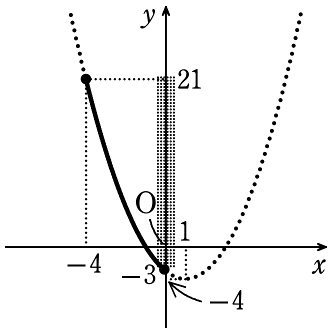
$=(x^2-2x)-3$

$=(x^2-2x+1^2-1^2)-3$

$=(x^2-2x+1^2)-1^2-3$

$=(x-1)^2-4$

この関数のグラフは，右の図の実線部分である。



よって，値域は　$-3 \leqq y \leqq 21$

したがって，$x=-4$ のとき最大値 21,

$x=0$　のとき最小値 -3

(2) $y=2x^2-4x-6$

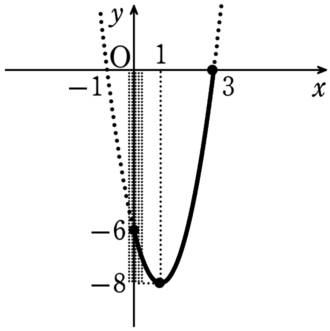
$=2(x^2-2x)-6$

$=2(x^2-2x+1^2-1^2)-6$

$=2(x^2-2x+1^2)-2\cdot1^2-6$

$=2(x-1)^2-8$

この関数のグラフは，右の図の実線部分である。



よって，値域は　$-8 \leqq y \leqq 0$

したがって，$x=3$ のとき最大値 0,

$x=1$ のとき最小値 -8

$\boxed{2}$ (1) $3x^2+5x-2 \geqq 0$ の左辺を因数分解して

$(x+2)(3x-1) \geqq 0$

よって　　$x \leqq -2,\ \dfrac{1}{3} \leqq x$

1	2 →	6
3	−1 →	−1
3	−2	5

(2) 整理して　　$2x^2-x-5<0$　　　$2x^2-x-5=0$ を解くと　　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{4}$

よって，与えられた 2 次不等式の解は　　$\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}<x<\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$

$\boxed{3}$ 求める放物線は，放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，その頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから，その方程式は

$y=2(x-p)^2+2p-3$　…… ①

と表される。これが点 (1, 3) を通るから

$3=2(1-p)^2+2p-3$

整理して　　$p^2-p-2=0$　　　よって　　$(p+1)(p-2)=0$

したがって　　$p=-1,\ 2$

よって，① から　　$y=2(x+1)^2-5,\ y=2(x-2)^2+1$

$(y=2x^2+4x-3,\ y=2x^2-8x+9$ でもよい$)$

$\boxed{4}$　放物線の頂点が点 $(-1,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x+1)^2+3$$

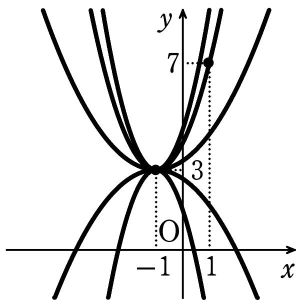
とおける。

点 $(1,\ 7)$ を通るから　$7=a(1+1)^2+3$

よって　　　　$a=1$

したがって　　$y=(x+1)^2+3$

　　　　　　　$[y=x^2+2x+4$ でもよい$]$



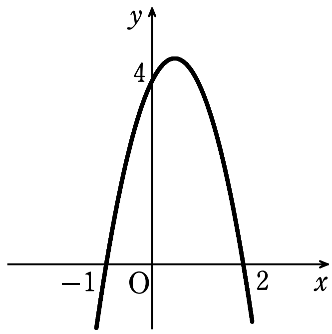
$\boxed{5}$ $y=ax^2+bx+4$ のグラフにおいて，$y>0$ となる x の値の範囲が $-1<x<2$ であるから，このグラフは x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，上に凸である。

したがって

$$a-b+4=0$$
$$4a+2b+4=0$$
$$a<0$$

第 1 式と第 2 式から　$a=-2,\ b=2$

これは $a<0$ を満たす。



$\boxed{6}$ $(k^2-1)x^2+2(k+1)x+3>0$ が x のすべての実数の値に対して成り立つ条件は

[1]　$k^2-1>0$　かつ　$D=\{2(k+1)\}^2-4(k^2-1)\cdot 3<0$　または

[2]　$k^2-1=0$　かつ　$2(k+1)=0$

[1] から　$(k+1)(k-1)>0$　かつ　$-8(k+1)(k-2)<0$

すなわち　$k<-1,\ 1<k$　かつ　$k<-1,\ 2<k$

よって　$k<-1,\ 2<k$

[2] から　$k=-1$

したがって，[1]，[2] から求める k の値の範囲は　$k\leqq -1,\ 2<k$

$\boxed{7}$ $f(x)=x^2-2ax-a+6$ とおくと

$$f(x)=(x-a)^2-a^2-a+6$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。

[1]　$a<-1$ のとき

関数 $y=f(x)$ は $x=-1$ で最小値をとる。

よって，$-1\leqq x\leqq 1$ のすべての値に対して $f(x)\geqq 0$ が常に成り立つための条件は

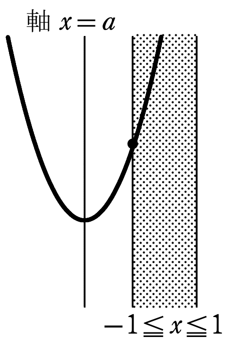
$$f(-1)\geqq 0$$

すなわち　$(-1)^2-2a(-1)-a+6\geqq 0$

よって　　$a\geqq -7$

したがって

$$-7\leqq a<-1 \quad \cdots\cdots ①$$



[2]　$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき

関数 $y=f(x)$ は $x=a$ で最小値をとる。

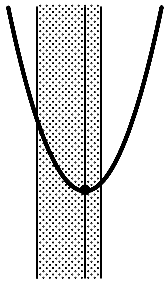
よって，$-1 \leqq x \leqq 1$ のすべての値に対して $f(x) \geqq 0$ が常に成り立つための条件は

$$f(a) \geqq 0$$

すなわち　$-a^2-a+6 \geqq 0$

よって　$-3 \leqq a \leqq 2$

したがって　$-1 \leqq a \leqq 1$　…… ②



[3]　$1<a$ のとき

関数 $y=f(x)$ は $x=1$ で最小値をとる。

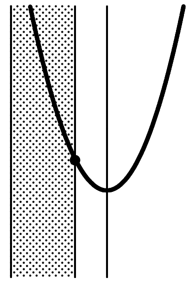
よって，$-1 \leqq x \leqq 1$ のすべての値に対して $f(x) \geqq 0$ が常に成り立つための条件は

$$f(1) \geqq 0$$

すなわち　$1^2-2a \cdot 1-a+6 \geqq 0$

よって　$a \leqq \dfrac{7}{3}$

したがって　$1<a \leqq \dfrac{7}{3}$　…… ③



①，②，③ の範囲をあわせて　　$-7 \leqq a \leqq \dfrac{7}{3}$

$\boxed{8}$　$f(x)=x^2+kx+2k-1$ とおく。

$$f(x)=x^2+2 \cdot \frac{k}{2}x+\left(\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2+2k-1$$

$$=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+2k-1$$

よって　軸 $x=-\dfrac{k}{2}$，頂点 $\left(-\dfrac{k}{2},\ -\dfrac{k^2}{4}+2k-1\right)$

また　$D=k^2-4 \cdot 1 \cdot (2k-1)=k^2-8k+4$

$$=\{k-(4+2\sqrt{3})\}\{k-(4-2\sqrt{3})\}$$

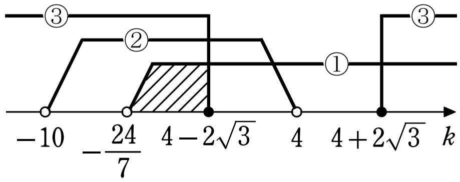
題意を満たすための条件は，

$$f(-2)>0,\ f(5)>0,\ -2<-\frac{k}{2}<5,\ D \geqq 0$$

$f(-2)=3>0$,

$f(5)=5^2+5k+2k-1=7k+24>0$ から

$k>-\dfrac{24}{7}$　…… ①



$-2<-\dfrac{k}{2}<5$ から　$-10<k<4$　…… ②

$D \geqq 0$ から　$k \leqq 4-2\sqrt{3}$，$4+2\sqrt{3} \leqq k$　…… ③

①，②，③ の共通部分は　$-\dfrac{24}{7}<k\leqq 4-2\sqrt{3}$

$\boxed{9}$ この 2 次不等式がすべての実数 x で成り立つための条件は

　　x^2 の係数について　$a>0$　…… ①

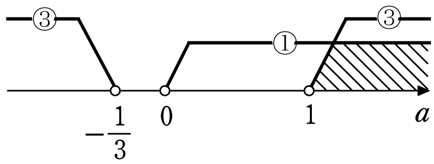
　　かつ　$D=(a-1)^2-4\cdot a(a-1)<0$　…… ②

② から　$(a-1)\{(a-1)-4a\}<0$

すなわち　$(a-1)(-3a-1)<0$

よって　$(a-1)(3a+1)>0$

ゆえに　$a<-\dfrac{1}{3}$，$1<a$　…… ③



① と ③ の共通範囲を求めて　$a>1$

$\boxed{10}$ 2 次方程式の係数について

$$D=\{-(8-a)\}^2-4\cdot 1\cdot (12-ab)=a^2+4(b-4)a+16$$

実数解をもつ条件は　$D\geqq 0$

すなわち

$$a^2+4(b-4)a+16\geqq 0 \cdots\cdots ①$$

がどんな a の値に対しても成り立つことである。

① の係数について

$$D_1=\{4(b-4)\}^2-4\cdot 1\cdot 16=16(b^2-8b+12)$$

① がどんな a の値に対しても成り立つための条件は，$D_1\leqq 0$ であるから

$$16(b^2-8b+12)\leqq 0$$

よって　$(b-2)(b-6)\leqq 0$

したがって　$2\leqq b\leqq 6$

$\boxed{11}$ (1)　C が点 $(1,\ -4)$ を通るから　$-4=-4\cdot 1^2+4(a-1)\cdot 1-a^2$

　すなわち　$a^2-4a+4=0$　　よって　$(a-2)^2=0$　　ゆえに　$a={}^{\text{ア}}2$

(2)　$y=-4x^2+4(a-1)x-a^2$ を変形すると　$y=-4\left(x-\dfrac{a-1}{2}\right)^2-2a+1$

　よって，C の頂点の座標は　$\left(\dfrac{a-1}{{}^{\text{イ}}2},\ {}^{\text{ウエ}}-2a+{}^{\text{オ}}1\right)$

(3)　$f(x)=-4x^2+4(a-1)x-a^2$ とおく．

　C は軸の方程式が $x=\dfrac{a-1}{2}$ で，上に凸な放物線である．

　$a>1$ であるから　$\dfrac{a-1}{2}>0$

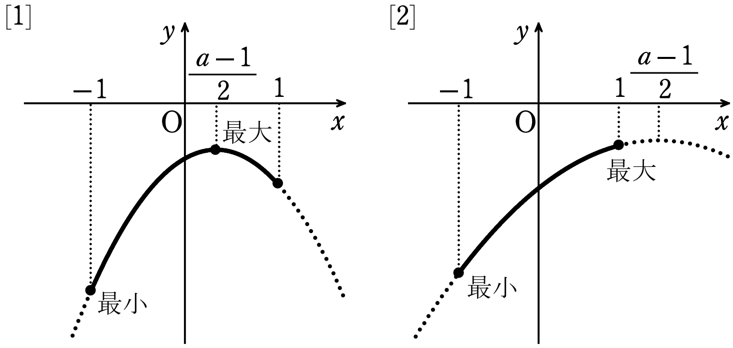
　最大値は　[1]　$0<\dfrac{a-1}{2}\leqq 1$ のとき　$f\left(\dfrac{a-1}{2}\right)$

　　　　　[2]　$\dfrac{a-1}{2}>1$ のとき　$f(1)$　　　　である．

　したがって，　[1]　$1<a\leqq {}^{\text{カ}}3$ ならば，最大値は　$f\left(\dfrac{a-1}{2}\right)=-2a+{}^{\text{キ}}1$

　　　　　　　[2]　$a>{}^{\text{カ}}3$ ならば，最大値は　$f(1)=-4\cdot 1^2+4(a-1)\cdot 1-a^2$

$= -a^2 + 4a - {}^{ク}8$



また，最小値は　$f(-1) = -4\cdot(-1)^2 + 4(a-1)\cdot(-1) - a^2 = -a^2 - {}^{ケ}4a$

次に，最大値と最小値の差が 12 となる a の値を求める.

[1]　$1 < a \leqq 3$ のとき

$(-2a+1) - (-a^2 - 4a) = 12$ から　$a^2 + 2a - 11 = 0$

これを解くと　$a = -1 \pm 2\sqrt{3}$　　$1 < a \leqq 3$ から　$a = -1 + 2\sqrt{3}$

[2]　$a > 3$ のとき

$(-a^2 + 4a - 8) - (-a^2 - 4a) = 12$ から　$a = \dfrac{5}{2}$

これは $a > 3$ を満たさないから，不適である.

ゆえに　$a = -1 + {}^{コ}2\sqrt{{}^{サ}3}$