

1	$2x^2 + 5xy - 3y^2 + x + 17y - 10$ を因数分解せよ。
2	$(x+1)(y+1)(xy+1) + xy$ を因数分解せよ。
3	$\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ を簡単にせよ。
4	3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 4a = 0$ (定数 a, b は実数) が虚数解 $\frac{-5+\sqrt{7}i}{2}$ をもつとき、 a, b の値と実数解を求めよ。
5	等式 $x^3 - 1 = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2) + c$ が x についての恒等式となるとき、定数 a, b, c の値を求めよ。
6	3次方程式 $x^3 + (2a-1)x^2 - 3(a-2)x + a - 6 = 0$ の3つの解のうち、ちょうど2つが等しいとき、定数 a の値を定めよ。
7	多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると8余り、 x^2-4 で割ると $-2x+1$ 余るとき、 $P(x)$ を $(x-1)(x^2-4)$ で割ったときの余りを求めよ。
8	(1) $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 24x - 45 = 0$ は、 $x = 1 + \sqrt{2}i$ を解にもつ。その他の解をすべて求めよ。 (2) (1)の結果を用いて、 $x^4 - 4ix^3 + 8x^2 - 24ix - 45 = 0$ の解をすべて求めよ。
9	$\{(9+4\sqrt{5})^n + (9-4\sqrt{5})^n\}^2 - \{(9+4\sqrt{5})^n - (9-4\sqrt{5})^n\}^2$ を簡単にせよ。ただし、 n は整数とする。
10	連立方程式 $\begin{cases} x + (a-1)y = -1 \\ ax + (a+3)y = 1 \end{cases}$ は $a = \square$ のとき解が存在せず、 $a = \square$ のとき解が無数に存在する。
11	a は定数とする。3つの数 x, y, z は関係式 $xyz = 2(xy + yz + zx), x + y + z = a$ を満たす。 (1) x, y, z のうち少なくとも1つが2であるとする。このとき、 a の値を求めよ。 (2) (1)のもとで、 $x^3 + y^3 + z^3$ の値を求めよ。
12	$f(x) = x^2 + 2x + c$ について、 x の方程式 $f(x) = 0$ が異なる2つの実数解をもち、 $f(f(x)) = 0$ が重解 α をもつとき、 α, c の値を求めよ。
13	$\alpha = 1 + \sqrt{3}i, \beta = 1 - \sqrt{3}i$ のとき $\left(\frac{\beta^2 - 4\beta + 8}{\alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} + 2\alpha^n + 4\alpha^{n-1} + \alpha^3 - 2\alpha^2 + 5\alpha - 2} \right)^3$ の値を求めよ。 ただし、 n は2以上の自然数、 i は虚数単位とする。
【配点】 8、10、11は2問扱いで、原則各6点、例外は9、13は8点	

1 解答 $(2x - y + 5)(x + 3y - 2)$

2 解答 $(xy + x + 1)(xy + y + 1)$

3 解答 $\sqrt{6}$

4 解答 $a = 10, b = 33, x = -5$

5 解答 $a = 6, b = 12, c = 7$

6 解答 $a = -7, -3, 2$

7 解答 $-3x^2 - 2x + 13$

8 解答 順に $x = 1 - \sqrt{2}i, 5, -3; x = \pm\sqrt{2} + i, 5i, -3i$

9 解答 4

10 解答 (ア) 3 (イ) -1

11 解答 $a = 2, x^3 + y^3 + z^3 = 8$

12 解答 $\alpha = -1, c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

13 解答 -8

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad 2x^2 + 5xy - 3y^2 + x + 17y - 10 &= 2x^2 + (5y + 1)x - (3y^2 - 17y + 10) \\
 &= 2x^2 + (5y + 1)x - (3y - 2)(y - 5) \\
 &= \{2x - (y - 5)\}\{x + (3y - 2)\} \\
 &= (2x - y + 5)(x + 3y - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 2 & \times & -(y-5) \longrightarrow -y+5 \\
 1 & & 3y-2 \longrightarrow 6y-4 \\
 \hline
 2 & & 5y+1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{2} \quad &(x+1)(y+1)(xy+1) + xy \\
 &= (x+1)\{xy^2 + (x+1)y + 1\} + xy \\
 &= x(x+1)y^2 + \{(x+1)^2 + x\}y + x + 1 \\
 &= \{x \cdot y + (x+1)\}\{(x+1) \cdot y + 1\} \\
 &= (xy + x + 1)(xy + y + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 x & \times & x+1 \longrightarrow (x+1)^2 \\
 x+1 & & 1 \longrightarrow x \\
 \hline
 & & (x+1)^2 + x
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \boxed{\text{別解}} \quad &(x+1)(y+1)(xy+1) + xy = (xy + x + y + 1)(xy + 1) + xy \\
 &= \{(xy + 1) + x + y\}(xy + 1) + xy \\
 &= (xy + 1)^2 + (x + y)(xy + 1) + xy \\
 &= \{(xy + 1) + x\}\{(xy + 1) + y\} \\
 &= (xy + x + 1)(xy + y + 1)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{3} \quad \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

4 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4a$ とおく.

$$x = \frac{-5 + \sqrt{7}i}{2} \text{ のとき } 2x + 5 = \sqrt{7}i$$

両辺を平方して $4x^2 + 20x + 25 = -7$ から $x^2 + 5x + 8 = 0$

$f(x)$ は $x^2 + 5x + 8$ で割り切れるから、次の恒等式が成り立つ.

$$x^3 + ax^2 + bx + 4a = (x^2 + 5x + 8)(x + c)$$

$$\text{よって } x^3 + ax^2 + bx + 4a = x^3 + (c+5)x^2 + (5c+8)x + 8c$$

ゆえに、両辺の係数を比べて

$$a = c + 5 \dots\dots \textcircled{1}, \quad b = 5c + 8 \dots\dots \textcircled{2}, \quad 4a = 8c \dots\dots \textcircled{3}$$

①を③に代入すると、 $4(c+5) = 8c$ から $c = 5$

これを①、②に代入して $a = 10, b = 33$

また、実数解は $x = -c = -5$

5 $x^3 - 1 = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2) + c \dots\dots \textcircled{1}$ が x についての恒等式であるから、どのような x についても成り立つ。

①に $x=2$ を代入すると $7 = c$

①に $x=3$ を代入すると $26 = 1 + a + b + c$

①に $x=1$ を代入すると $0 = -1 + a - b + c$

これを解いて $a = 6, b = 12, c = 7$

このとき、①の右辺は $(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 12(x-2) + 7 = x^3 - 1$ となり、左辺に一致し、恒等式となる。

したがって $a = 6, b = 12, c = 7$

別解1 右辺を展開して整理すると

$$x^3 - 1 = x^3 + (a-6)x^2 + (-4a+b+12)x + 4a - 2b + c - 8$$

よって $a-6=0, -4a+b+12=0, 4a-2b+c-8=-1$

これを解くと $a=6, b=12, c=7$

別解2 $x-2=t$ とおくと $x=t+2$

等式に代入すると $(t+2)^3 - 1 = t^3 + at^2 + bt + c$

すなわち $t^3 + 6t^2 + 12t + 7 = t^3 + at^2 + bt + c$

これは t の恒等式となる。

両辺の係数を比較して $a=6, b=12, c=7$

6 $f(x) = x^3 + (2a-1)x^2 - 3(a-2)x + a-6$ とすると

$$f(1) = 1^3 + (2a-1) \cdot 1^2 - 3(a-2) \cdot 1 + a - 6$$

$$= 1 + 2a - 1 - 3a + 6 + a - 6 = 0$$

よって、 $f(x)$ は $x-1$ を因数にもつから

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 2ax - a + 6)$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2a-1 \quad -3(a-2) \quad a-6 \quad \underline{1} \\ \quad 1 \quad \quad 2a \quad -a+6 \\ \hline 1 \quad 2a \quad -a+6 \quad 0 \end{array}$$

ゆえに、方程式は $(x-1)(x^2 + 2ax - a + 6) = 0$

したがって $x-1=0$ または $x^2 + 2ax - a + 6 = 0$

この3次方程式の3つの解のうち、ちょうど2つが等しい条件は、次の[1]または[2]が成り立つことである。

[1] $x^2 + 2ax - a + 6 = 0$ が1でない重解をもつ。

判別式を D とすると

$$D = 0 \quad \text{かつ} \quad 1^2 + 2a \cdot 1 - a + 6 = a + 7 \neq 0$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-a + 6) = a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2)$$

$D = 0$ とすると $a = -3, 2$

これは $a + 7 \neq 0$ を満たす。

[2] $x^2 + 2ax - a + 6 = 0$ の1つの解が1, 他の解が1でない。

$x=1$ が解であるから $1^2 + 2a \cdot 1 - a + 6 = 0$

よって $a + 7 = 0$ ゆえに $a = -7$

このとき $x^2 - 14x + 13 = 0$ よって $(x-1)(x-13) = 0$

これを解いて $x = 1, 13$

したがって、他の解が1でないから適する。

[1], [2] から、求める定数 a の値は $a = -7, -3, 2$

7 $(x-1)(x^2-4)$ は3次式であるから、 $P(x)$ を $(x-1)(x^2-4)$ で割ったときの余りは、2次以下の多項式になる。

よって、求める余りを $ax^2 + bx + c$ として

$$P(x) = (x-1)(x^2-4)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

とおける。

条件から $P(1) = 8$

また、 $P(x)$ を x^2-4 で割った商を $A(x)$ とする。余りが $-2x+1$ であるから

$$P(x) = (x^2-4)A(x) - 2x + 1$$

よって $P(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3,$

$$P(-2) = -2 \cdot (-2) + 1 = 5$$

したがって $P(1) = a + b + c = 8$

$$P(2) = 4a + 2b + c = -3$$

$$P(-2) = 4a - 2b + c = 5$$

これを解いて

$$a = -3, b = -2, c = 13$$

よって、求める余りは

$$-3x^2 - 2x + 13$$

8 係数が実数であるから、 $x = 1 - \sqrt{2}i$ も解である。

したがって、与式の左辺は $\{x - (1 + \sqrt{2}i)\}\{x - (1 - \sqrt{2}i)\} = x^2 - 2x + 3$ で割り切れる。

$$\text{ゆえに } x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 24x - 45 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x - 15)$$

$$\text{よって } (x^2 - 2x + 3)(x - 5)(x + 3) = 0 \quad \text{ゆえに、他の解は } x = 1 - \sqrt{2}i, 5, -3$$

また、

$$x^4 - 4ix^3 + 8x^2 - 24ix - 45 = 0 \text{ は } (-ix)^4 - 4(-ix)^3 - 8(-ix)^2 + 24(-ix) - 45 = 0$$

$$\text{と変形できるから } -ix = 1 \pm \sqrt{2}i, 5, -3 \quad \text{ゆえに } x = \pm\sqrt{2} + i, 5i, -3i$$

9 $a = (9 + 4\sqrt{5})^n, b = (9 - 4\sqrt{5})^n$ とすると

$$(\text{与式}) = (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$= 4(9 + 4\sqrt{5})^n(9 - 4\sqrt{5})^n = 4\{(9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})\}^n = 4(81 - 80)^n = 4 \cdot 1^n = 4$$

10 $\begin{cases} x + (a-1)y = -1 \cdots \cdots \text{①} \\ ax + (a+3)y = 1 \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$ とおく。

$$\text{①} \times a - \text{②} \text{ から } (a^2 - 2a - 3)y = -a - 1$$

$$\text{すなわち } (a+1)(a-3)y = -(a+1) \cdots \cdots \text{③}$$

[1] $a \neq 3$ かつ $a \neq -1$ のとき

$$\text{③ から } y = -\frac{1}{a-3}$$

$$\text{このとき、① から } x = \frac{2}{a-3}$$

ゆえに、解 (x, y) が 1 つに定まる。

[2] $a = 3$ のとき ③ を満たす y は存在しない。

ゆえに、解は存在しない。

[3] $a = -1$ のとき ③ を満たす y は無数に存在する。

このとき、①、②はともに $x - 2y = -1$ となる。

ゆえに、連立方程式の解は $x - 2y = -1$ を満たす (x, y) となり、無数に存在する。

[1] ~ [3] から、 $a = 3$ のとき解が存在せず、 $a = -1$ のとき解が無数に存在する。

11 (1) $(x-2)(y-2)(z-2) = xyz - 2(xy + yz + zx) + 4(x+y+z) - 8$

$$xyz = 2(xy + yz + zx), x + y + z = a \text{ であるから } (x-2)(y-2)(z-2) = 4a - 8$$

$$x, y, z \text{ のうち少なくとも 1 つが 2 であるとき } (x-2)(y-2)(z-2) = 0$$

$$\text{よって、 } 4a - 8 = 0 \quad \text{これを解くと } a = 2$$

(2) また、 $x + y + z = a = 2$ であるから

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3xyz \\
 &= 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3 \cdot 2(xy+yz+zx) \\
 &= 2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) \\
 &= 2(x+y+z)^2 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

- 12 $f(x)=0$ すなわち $x^2+2x+c=0$ の異なる2つの実数解を β, γ とすると, 解と係数の関係により $\beta+\gamma=-2, \beta\gamma=c$

よって, $f(f(x))=0$ から

$$\begin{aligned}
 \{f(x)\}^2 + 2f(x) + c &= 0 \\
 \{f(x)\}^2 - (\beta+\gamma)f(x) + \beta\gamma &= 0 \\
 \{f(x) - \beta\}\{f(x) - \gamma\} &= 0 \\
 (x^2+2x+c-\beta)(x^2+2x+c-\gamma) &= 0
 \end{aligned}$$

$f(f(x))=0$ が重解 α をもつから,

$$x^2+2x+c-\beta=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}, \quad x^2+2x+c-\gamma=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

とすると, 次のいずれかが成り立つ。

- [1] $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ がともに解 α をもつ
- [2] $\textcircled{1}$ が重解 α をもつ
- [3] $\textcircled{2}$ が重解 α をもつ

[1] のとき, $\beta=\gamma=\alpha^2+2\alpha+c$ となり, $\beta \neq \gamma$ を満たさないから不適。

[2] のとき, $\textcircled{1}$ は $(x+1)^2=0$

よって $\alpha=-1, c-\beta=1$

$\beta=c-1$ を $x^2+2x+c=0$ に代入すると $(c-1)^2+2(c-1)+c=0$

よって $c^2+c-1=0$ したがって $c=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

[3] のとき, [2] のときと同様にして $\alpha=-1, c=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

以上から $\alpha=-1, c=\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

- 13 $\alpha=1+\sqrt{3}i, \beta=1-\sqrt{3}i$ のとき $\alpha+\beta=2, \alpha\beta=4$

よって, α, β は t についての2次方程式 $t^2-2t+4=0$ の2つの解である。

$f(t)=t^2-2t+4$ とすると

$$f(\alpha)=\alpha^2-2\alpha+4=0, \quad f(\beta)=\beta^2-2\beta+4=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ゆえに, $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned}
 \alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} + 2\alpha^n + 4\alpha^{n-1} &= \alpha^{n-1}(\alpha^3 - \alpha^2 + 2\alpha + 4) = \alpha^{n-1}(\alpha+1)(\alpha^2 - 2\alpha + 4) \\
 &= \alpha^{n-1}(\alpha+1)f(\alpha) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + 5\alpha - 2 = \alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 4) + \alpha - 2 = \alpha f(\alpha) + \alpha - 2 = \alpha - 2 = -\beta,$$

$$\beta^2 - 4\beta + 8 = (\beta^2 - 2\beta + 4) - 2\beta + 4 = f(\beta) - 2(\beta - 2) = -2(\beta - 2) = 2\alpha$$

したがって
$$\left(\frac{\beta^2 - 4\beta + 8}{\alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} + 2\alpha^n + 4\alpha^{n-1} + \alpha^3 - 2\alpha^2 + 5\alpha - 2} \right)^3 = \left(\frac{2\alpha}{-\beta} \right)^3 = -\frac{8\alpha^3}{\beta^3}$$

ここで、 $(t+2)f(t) = (t+2)(t^2 - 2t + 4) = t^3 + 8$, $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) = 0$ より

$$\alpha^3 + 8 = (\alpha + 2)f(\alpha) = 0, \quad \beta^3 + 8 = (\beta + 2)f(\beta) = 0$$

ゆえに $\alpha^3 = -8$, $\beta^3 = -8$

したがって
$$\left(\frac{\beta^2 - 4\beta + 8}{\alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} + 2\alpha^n + 4\alpha^{n-1} + \alpha^3 - 2\alpha^2 + 5\alpha - 2} \right)^3 = -\frac{8 \cdot (-8)}{-8} = -8$$