第３１章　積分計算２（数Ⅲ，２講分）

Ａ問題

31-A-1　F585A

等式 $f(x) = \sin x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

31-A-2　F586A

等式 $\int_a^{2x} f(t)\,dt = 1 - e^x$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．

31-A-3　F593A，594A

(1)　極限値　$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$　を求めよ。

(2)　極限値　$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}\pi$　を求めよ。

31-A-4　F601A

(1)　$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のとき，$\frac{3}{4} \leqq x^2 - x + 1 \leqq 1$ が成り立つことを示せ．

(2)　不等式 $\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2 - x + 1} < \frac{2}{3}$ が成り立つことを示せ．

31-A-5 F603A

n は 2 以上の自然数とする．

(1) 曲線 $y = \log x$ は上に凸であることを示せ．

(2) 2 以上の自然数 k に対して，不等式

$$\log(k-1) < \int_{k-1}^{k} \log x \, dx < \log k$$

が成り立つことを示せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{1}^{n} \log x \, dx$ を求めよ．

(4) 不等式 $\log(n-1)! < n\log n - n + 1 < \log n!$ が成り立つことを示せ．

B問題

31-B-1 F586A

関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して，$f(x) = x + \int_0^x f(t)\,dt$ を満たすものとする．

(1) $f(0)$ の値を求めよ．

(2) $f'(x) = 1 + f(x)$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) を用いて，$\{e^{-x}f(x)\}' = e^{-x}$ を示せ．

(4) $f(x)$ を求めよ．

31-B-2 F595A

次の極限値を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{n+k}$

31-B-3 F596B

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \log\frac{x+2}{x+1}\,dx$ を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)\cdots(2n+n)}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

31-B-4

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\log 2+(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$ を示せ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ を求めよ.

31-B-5 F602B

自然数 n に対して，$S_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ とする.

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(1-\cos x)\,dx$ を求めよ.

(2) $n\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi$ のとき，$\dfrac{1}{(n+1)^2\pi^2} \leqq \dfrac{1}{x^2} \leqq \dfrac{1}{n^2\pi^2}$ が成り立つことを示せ.

(3) すべての自然数 n に対して，$\dfrac{1}{(n+1)^2\pi} < S_n < \dfrac{1}{n^2\pi}$ が成り立つことを示せ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$ を求めよ.

31-B-6 F604B

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を求めよ．

(2) n が 3 以上の自然数とするとき，不等式

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$

が成り立つことを示せ．

31-B-7 F605B

(1) $n=1$，2，3，$\cdots$ のとき，不等式

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{n}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n=2$，3，4，$\cdots$ のとき，不等式

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ を求めよ．

C問題

31-C-1　F589B

関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して,

$$f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$$

を満たすとする.

(1) $f(0)$ の値を求め，さらに，$f'(x) = 2x - f(x)$ が成り立つことを示せ.

(2) $\{e^x f(x)\}' = 2xe^x$ を示せ.

(3) $f(x)$ を求めよ.

31-C-2　F598B

n は自然数とする.

(1) 等式

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ の和を求めよ.

31-C-3　F23C

$[\,x\,]$ は実数 x を越えない最大の整数を表す．n を自然数とし $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{[\sqrt{2n^2-k^2}\,]}{n^2}$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{31-C-4}}$ F606B

$f(x) = e^x - 1$，$g(x) = \log(x+1)$ とする．$a > 0$，$b > 0$ のとき，

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx \geqq ab$$

を示せ．また，等号が成り立つための a，b の満たすべき条件を求めよ．

$\boxed{\textbf{31-C-5}}$ F607C

(1) $0 < x < a$ を満たす実数 x，a に対して，不等式

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t}\,dt < x\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

が成り立つことを示せ．

(2) (1) を利用して，$0.68 < \log 2 < 0.71$ を示せ．

$\boxed{\textbf{31-C-6}}$ F608C

a，b は $a < b$ を満たす実数とする．関数 $f(x)$ が区間 $a \leqq x \leqq b$ において連続であるとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c), \quad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在することを示せ．

演習問題

31-E-1　ﾁｬﾚ 75　2004 富山大学

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\log(n^2+2n+1)-\log n^2}{3\cos\frac{\pi}{3n}k}$ を求めよ．

31-E-2　F ﾁｬﾚ 76　2009 大阪医科大学

(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，不等式 $2(1+x^2) \leqq \dfrac{2}{1-x^2} \leqq 2(1+x^2)+\dfrac{x^2}{4}$ を示せ．

(2)　不等式 $\dfrac{56}{81} \leqq \log 2 \leqq \dfrac{56}{81}+\dfrac{1}{324}$ を示せ．

31-E-3

$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}}$ のとき，S の整数部分を求めよ．

31-E-4

(1)　0 以上の整数 k に対して，不等式

$$\frac{1}{2k+3} < \int_k^{k+1}\frac{dx}{2x+1} < \frac{1}{2k+1}$$

が成り立つことを示せ．

(2)　自然数 n に対して，不等式

$$\frac{1}{2}\log(2n+3)-1 < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} < \frac{1}{2}\log(2n+1)$$

が成り立つことを示せ．