YAWARAKA 先生のテキスト 解答 ⑫３ 二次関数
合成関数・練習問題

1

$2^x=X$ ……① とおくと，$X>0$ であり，方程式は　$X^2-X=12$

整理して因数分解すると　$(X+3)(X-4)=0$

$X>0$ であるから　$X=4$　　すなわち　$2^x=4$

よって　$x=^{ア}2$

① から，$X>0$ のとき X と x は 1 対 1 に対応するので，方程式 $4^x-2^x=k$ の解の個数は，方程式 $X^2-X=k$ の $X>0$ における解の個数と一致する。

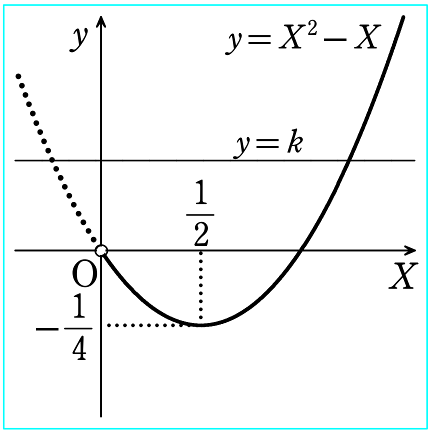
この解の個数は，$y=X^2-X\ (X>0)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数と一致する。

よって，方程式 $X^2-X=k$ の解がただ 1 つであるのは，右の図から

$$k \geqq ^{イ}0 \text{ または } k=^{ウ}-\frac{1}{4}$$

また，$k=-\frac{1}{4}$ のときの解は　$X=\frac{1}{2}$

すなわち　$2^x=\frac{1}{2}$　　よって　$x=^{エ}-1$



$\boxed{2}$

(1)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

等号が成り立つのは，$2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のときである。

よって，t の最小値は 2 である。

また　　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

(2)　$y=4^x+4^{-x}-2k(2^x+2^{-x})+2=(t^2-2)-2kt+2=t^2-2kt=(t-k)^2-k^2$

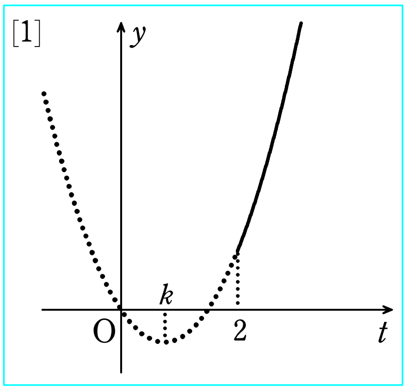
t のとり得る値の範囲は　　$t\geqq 2$

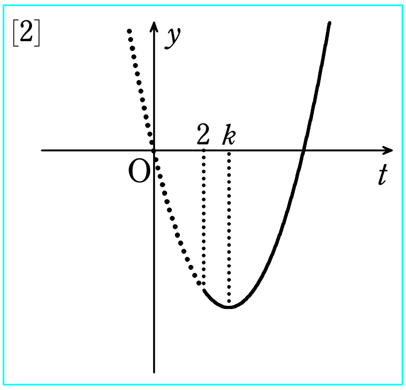
[1]　$k<2$ のとき

y は $t=2$ のとき最小値をとり，その最小値は　　$4-4k$

[2]　$k\geqq 2$ のとき

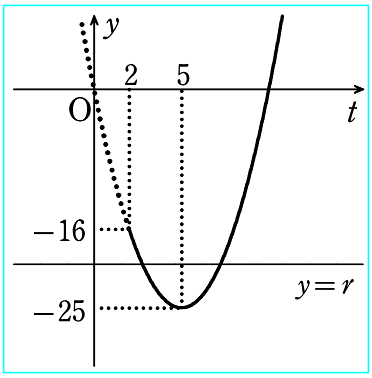
y は $t=k$ のとき最小値をとり，その最小値は　　$-k^2$





(3)　$k=5$ のとき　　$y=(t-5)^2-25$

$y=(t-5)^2-25$ $(t\geqq 2)$ のグラフは右の図のようになる。



また，t を固定したとき，$t=2^x+2^{-x}$ を満たす実数 x の個数を考える。

$t=2^x+2^{-x}$ から　　$2^{2x}-t\,2^x+1=0$

$2^x=X$ とおくと　　$X^2-tX+1=0$　……①

X についての方程式①の判別式を D とすると

$$D=t^2-4$$

よって，①の異なる実数解の個数は

$t=2$ のとき　1 個，$t>2$ のとき　2 個

また，$t>2$ のとき，方程式①の解は 2 個とも正である。

したがって，$t=2^x+2^{-x}$ を満たす実数 x の個数は

$t=2$ のとき　1 個，$t>2$ のとき　2 個

以上と $y=(t-5)^2-25$ $(t\geqq 2)$ のグラフから，$y=r$ となるような x の個数は

$r<-25$ のとき　0 個

$r=-25$，$r>-16$ のとき　2 個

$-25<r<-16$ のとき　4 個

$r=-16$ のとき　3 個

$\boxed{3}$

(1)　$t=\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta+\dfrac{3}{4}\pi\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq 1$

(2)　$t=\cos\theta-\sin\theta$ の両辺を平方すると　$t^2=\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

よって　　$\cos\theta\sin\theta=\dfrac{1-t^2}{2}$

したがって

$f(\theta)=2(\cos^3\theta-\sin^3\theta)=2(\cos\theta-\sin\theta)(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$

$\quad=2(\cos\theta-\sin\theta)(1+\cos\theta\sin\theta)=2t\left(1+\dfrac{1-t^2}{2}\right)=-t^3+3t$

(3)　$f(\theta)=g(t)$ とおくと　　$g(t)=-t^3+3t$

$g'(t)=-3t^2+3=-3(t+1)(t-1)$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq 1$ における $g(t)$ の増減表は，次のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0
$g(t)$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

したがって，$y=g(t)$

$(-\sqrt{2}\leqq t\leqq 1)$ のグラフは右の上図のようになる。また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ のグラフを θ 軸を縦軸，t 軸を横軸にとってかくと，右の下図のようになる。

この2つの図から，求める θ の個数は次のようになる。

$k>2$ のとき 0 個

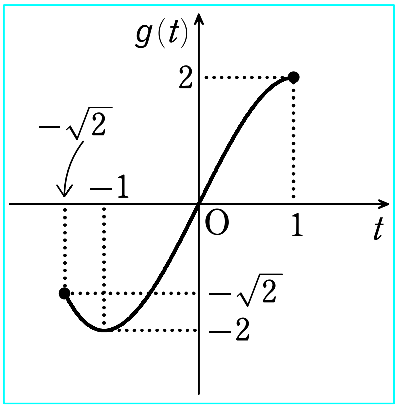
$-\sqrt{2}<k\leqq 2$ のとき 1 個

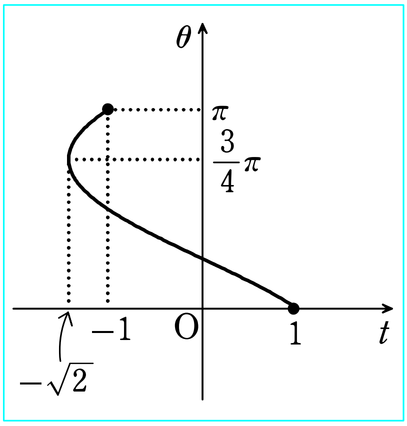
$k=-\sqrt{2}$ のとき 2 個

$-2<k<-\sqrt{2}$ のとき 3 個

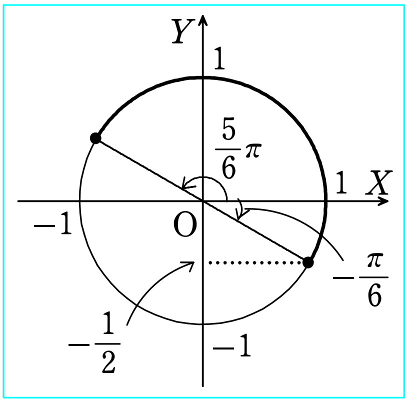
$k=-2$ のとき 2 個

$k<-2$ のとき 0 個





$\boxed{4}$



(1)　$t=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$ から　　$-\frac{\pi}{6} \leqq x-\frac{\pi}{6} \leqq \frac{5}{6}\pi$

よって　　$-\frac{1}{2} \leqq \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \leqq 1$

したがって　　$-1 \leqq t \leqq 2$

(2)　$t^2=(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2$

$=3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x$

$=3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-\sqrt{3}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2$

よって　　$-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=t^2-2$

ゆえに　　$y=(t^2-2)-2at+4=t^2-2at+2$

(3)　$f(t)=t^2-2at+2$ とすると　　$f(t)=(t-a)^2-a^2+2$

$0 \leqq y \leqq 6$ が常に成り立つための条件は，次のようになる。

[1]　$a \leqq -1$ のとき

$f(-1) \leqq y \leqq f(2)$ であるから　　$f(-1) \geqq 0$ かつ $f(2) \leqq 6$

すなわち　　$2a+3 \geqq 0$ かつ $-4a+6 \leqq 6$

これを解くと　$a \geqq 0$　　　　　これと $a \leqq -1$ の共通範囲はない。

[2]　$-1<a<\frac{1}{2}$ のとき

$f(a) \leqq y \leqq f(2)$ であるから　　$f(a) \geqq 0$ かつ $f(2) \leqq 6$

すなわち　　$-a^2+2 \geqq 0$ かつ $-4a+6 \leqq 6$

これを解くと　$0 \leqq a \leqq \sqrt{2}$　　　　これと $-1<a<\frac{1}{2}$ の共通範囲は　$0 \leqq a<\frac{1}{2}$

[3]　$\frac{1}{2} \leqq a<2$ のとき

$f(a) \leqq y \leqq f(-1)$ であるから　　$f(a) \geqq 0$ かつ $f(-1) \leqq 6$

すなわち　　$-a^2+2 \geqq 0$ かつ $2a+3 \leqq 6$

これを解くと　$-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$　　　これと $\frac{1}{2} \leqq a<2$ の共通範囲は　$\frac{1}{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$

[4]　$2 \leqq a$ のとき

$f(2) \leqq y \leqq f(-1)$ であるから　　$f(2) \geqq 0$ かつ $f(-1) \leqq 6$

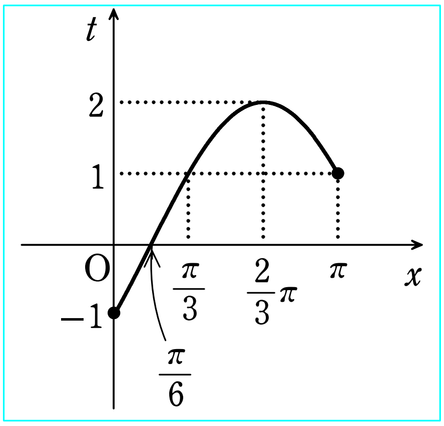
すなわち　　$-4a+6 \geqq 0$ かつ $2a+3 \leqq 6$

これを解くと　$a \leqq \frac{3}{2}$　　　　　これと $2 \leqq a$ の共通範囲はない。

以上から，求める a の値の範囲は　　$0 \leqq a \leqq \sqrt{2}$

(4)　方程式を t で表すと

$$t^2-2at+2=0 \quad \text{すなわち} \quad f(t)=0$$



$t=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ のグラフは，右の図のようになる。

よって，$-1 \leqq t < 1$，$t=2$ のとき，x はただ1つの値をとり，$1 \leqq t < 2$ のとき，x は異なる2つの値をとる。

したがって，与えられた方程式が3個以上の異なる実数解をもつのは，次の[1]〜[3]の場合が考えられる。

[1]　$f(t)=0$ が $1 \leqq t < 2$ の範囲に異なる2つの実数解をもつとき
(与えられた方程式の実数解は4個)

$$f(a)<0 \text{ かつ } 1<a<2 \text{ かつ } f(1) \geqq 0 \text{ かつ } f(2)>0$$

$f(a)<0$ から　$-a^2+2<0$　よって　$a<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<a$

$f(1) \geqq 0$ から　$-2a+3 \geqq 0$　よって　$a \leqq \dfrac{3}{2}$

$f(2)>0$ から　$-4a+6>0$　よって　$a<\dfrac{3}{2}$

共通範囲を求めて　$\sqrt{2}<a<\dfrac{3}{2}$

[2]　$f(t)=0$ が $-1 \leqq t < 1$ と $1 \leqq t < 2$ の範囲に1つずつ解をもつとき
(与えられた方程式の実数解は3個)

このとき，「$f(1) \leqq 0$ かつ $f(2)>0$」であることが必要であるが，$f(2)=2f(1)$ であるから，$f(1)$ と $f(2)$ は同符号である。

よって，条件を満たすような a の値は存在しない。

[3]　$f(t)=0$ の1つの解が $t=2$ で，他の解が $1 \leqq t < 2$ の範囲にあるとき
(与えられた方程式の実数解は3個)

$f(t)=0$ が $t=2$ を解にもつから　$f(2)=-4a+6=0$

よって　$a=\dfrac{3}{2}$

$f(2)=0$ のとき $f(1)=0$ であるから，$f(t)=0$ の解は $t=1$，2 となり，適する。

[1]，[2]，[3]から，求める a の値の範囲は　$\sqrt{2}<a \leqq \dfrac{3}{2}$

$\boxed{4}$

(1)　$x^2-\dfrac{4}{5}=x$ から　　$5x^2-5x-4=0$

　$\alpha<\beta$ であるから　　$\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$，$\beta=\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$

(2)　$f(\alpha)=\alpha$ から　　$f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$

(3)　$f(f(x))=f\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)=\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)^2-\dfrac{4}{5}=x^4-\dfrac{8}{5}x^2-\dfrac{4}{25}$

(4)　$f(f(x))=x$ から　$x^4-\dfrac{8}{5}x^2-\dfrac{4}{25}=x$

　すなわち　　$25x^4-40x^2-25x-4=0$　…… ①

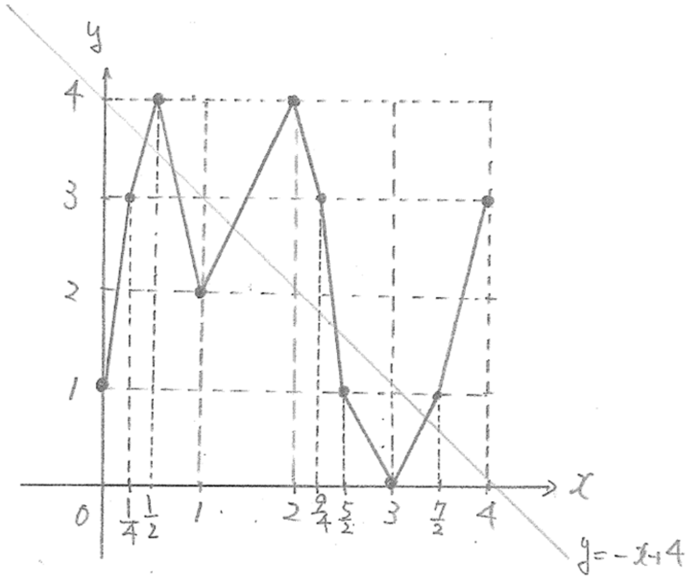
　ここで，$f(f(\alpha))=\alpha$，$f(f(\beta))=\beta$ から $x=\alpha$，β は ① を満たす。

　よって，① の左辺は $5x^2-5x-4$ を因数にもち　　$(5x^2-5x-4)(5x^2+5x+1)=0$

　したがって，$f(f(x))=x$ すなわち ① の解は　　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$，$\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

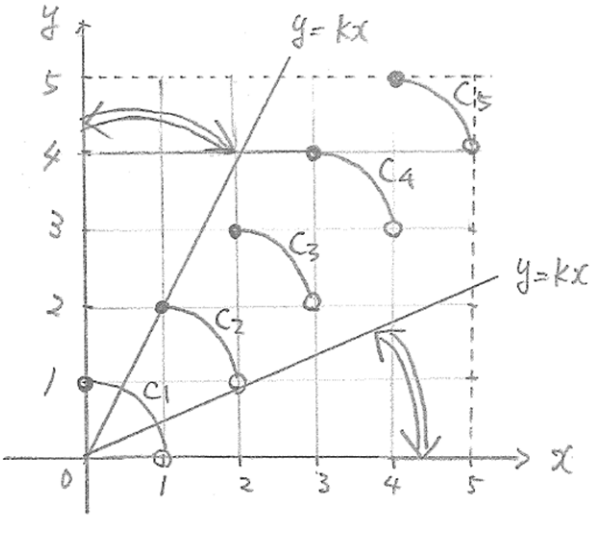
標準問題

③1-標-1



よって　5コ

③1-標-2



(1) $0 < k \leqq \dfrac{1}{2},\ 2 < k$

(2) $\dfrac{n-1}{n} < k \leq \dfrac{n}{n+1},\ \dfrac{n+1}{n} < k \leq \dfrac{n}{n-1}$

（注）解答の順番が一部入れ替わっています。

③**1-標-3**

解　$g(g(x))=g(x)$ で $g(x)=t$ とおくと $g(t)=t$ となる．$g(t)=t$ の解が

(ア)　虚数解のときは，虚数解 t に対して $g(x)=t$ を解いて実数解 x が得られることはなく，不適．

(イ)　重解のとき，それを α とすると解 x は $g(x)=\alpha$ から得られるが，これは2次方程式であるから多くても2つしかなく，不適．

(ウ)　異なる実数解をもつとき，$g(t)=t$ は

$$t^2+(2a-1)t+2=0 \cdots\cdots①$$

であり，　$D=(2a-1)^2-8>0 \cdots\cdots②$

となる．①の実数解を β，γ $(\beta<\gamma)$ とすると，実数解 x は　$g(x)=\beta\cdots\cdots③$，$g(x)=\gamma$

から得られる．曲線 $y=g(x)$ と2直線 $y=\beta$，$y=\gamma$ が異なる3つの交点をもつのは，③が重解をもつときである．　$g(x)=(x+a)^2+2-a^2$

と書けて

$$(x+a)^2+2-a^2=\beta$$

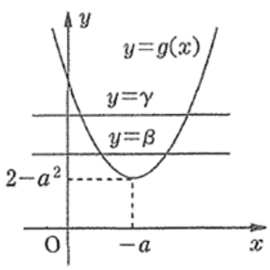
が重解をもつのは $\beta=2-a^2$ のときであり，この $t=2-a^2$ が $g(t)=t$，すなわち

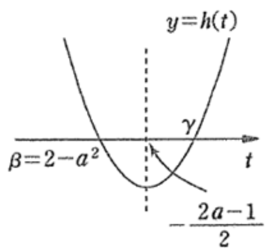
$$(t+a)^2+2-a^2=t$$

を満たす．$(2-a^2+a)^2+2-a^2=2-a^2$

$$\{(2-a)(1+a)\}^2=0$$

$$\therefore\ a=-1,\ a=2 \cdots\cdots④$$





このとき，$t^2+(2a-1)t+2=0$ の他の解 γ が $\beta=2-a^2$ より大きい条件は $h(t)=t^2+(2a-1)t+2$ のグラフの軸について $-\dfrac{2a-1}{2}>2-a^2$

$$\therefore\ 2a^2-2a-3>0 \cdots\cdots⑤$$

が成り立つときである．④の a はいずれも②，⑤を満たす．　（答）　$a=-1,\ 2$