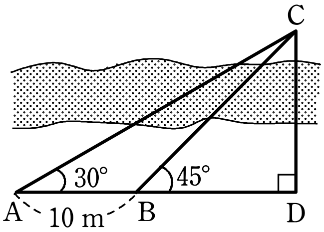
数学　第３回小テスト　解答解説

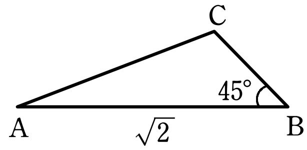
$\boxed{1}$ 右の図のように，10 m 離れた 2 地点 A，B がある。
地点 A，B から川の向こう岸の地点 C を見て，
∠CAD を測ると 30°，∠CBD を測ると 45° であった。
C，D 間の距離を求めよ。



$\boxed{2}$ △ABC において，$b=7$，$c=5$，$B=60^\circ$ のとき，a を求めよ。

$\boxed{3}$ △ABC において，$a=\sqrt{7}$，$b=2$，$c=3$ とする。線分 BC の中点を M とするとき，
AM の長さを求めよ。

$\boxed{4}$ △ABC において，$B=45^\circ$，$a:b=1:2$，
$c=\sqrt{2}$ であるとき，次のものを求めよ。
(1)　$\sin A$ の値
(2)　a



$\boxed{5}$ 次のような △ABC に内接する円の半径を求めよ。
(1)　$a=13$，$b=12$，$c=5$　　　(2)　$a=7$，$b=8$，$C=120^\circ$

$\boxed{6}$ 円に内接する四角形 ABCD があり，AB＝2，BC＝4，CD＝3，DA＝2 である。
次のものを求めよ。
(1)　対角線 AC の長さ　　　(2)　四角形 ABCD の面積 S

$\boxed{7}$ 三角形 ABC が次の条件を満たすとすれば，どんな三角形か。
$\sin A\cos A=\sin B\cos B$

$\boxed{8}$ △ABC において，AB＝6，AC＝$6\sqrt{3}$，$\cos A=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であるとする。

このとき，BC＝$\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

さらに，点 D は辺 BC 上にあり，$\cos\angle \mathrm{BAD}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ であるとする。

このとき，$\mathrm{AB}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{AD}+\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}\mathrm{BD}$ であり，また，正弦定理により

$\mathrm{AD}=\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,\mathrm{BD}$ となる。

したがって，AD＝$\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

配点

1　10点

2　10点

3　10点

4　各10点　計20点

5　各10点　計20点

6　各10点　計20点

7　10点

8　ｱｲ　5点　ｳｴ　5点　ｵｶ　5点　ｷ　5点　ｸｹ　5点　計25点

$\boxed{1}$ 解答　$5(\sqrt{3}+1)$ m

$\boxed{2}$ 解答　8

$\boxed{3}$ 解答　$\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　(2)　$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

$\boxed{5}$ 解答　(1)　2　　(2)　$\sqrt{3}$

$\boxed{6}$ 解答　(1)　4　　(2)　$\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

$\boxed{7}$ 解答　BC＝CA の二等辺三角形 または ∠C＝90° の直角三角形

$\boxed{8}$ 解答　(ア)$\sqrt{(イ)}$　$6\sqrt{6}$　　$\dfrac{\sqrt{(ウ)}}{(エ)}$　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　$\dfrac{\sqrt{(オ)}}{(カ)}$　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　$\sqrt{(キ)}$　$\sqrt{3}$

(ク)$\sqrt{(ケ)}$　$3\sqrt{2}$

$\boxed{1}$ $\mathrm{CD}=x$ (m) とすると，直角三角形 BDC において　　$\mathrm{BD}=x$

直角三角形 ADC において，$\mathrm{CD}=\mathrm{AD}\tan 30°$ であるから

$$x=(10+x)\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

整理すると　　$(\sqrt{3}-1)x=10$

よって　　$x=\dfrac{10}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}$

$$=\frac{10(\sqrt{3}+1)}{2}$$

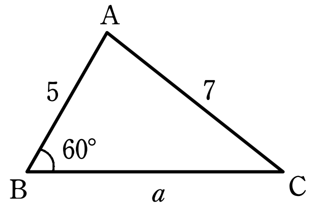
$$=5(\sqrt{3}+1)\quad(\mathrm{m})$$

$\boxed{2}$ 余弦定理により　　$7^2=a^2+5^2-2\cdot a\cdot 5\cos 60°$

整理すると　　$a^2-5a-24=0$

これを解いて　　$a=-3,\ 8$

$a>0$ であるから　　$a=8$



$\boxed{3}$ △ABC に余弦定理を使うと

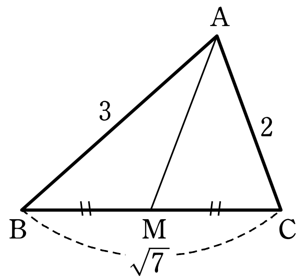
$$\cos B=\frac{3^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

△ABM に余弦定理を使うと

$$\mathrm{AM}^2=3^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$=\frac{19}{4}$$

$\mathrm{AM}>0$ であるから　　$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

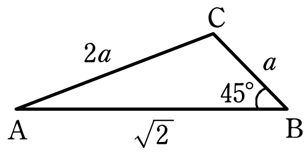


$\boxed{4}$ (1)　正弦定理により　　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin 45°}$

$a:b=1:2$ より，$b=2a$ であるから

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{2a}{\sin 45°}$$

よって　　$\sin A=\dfrac{a}{2a}\times\sin 45°=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$



(2)　余弦定理により　　$(2a)^2=a^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot a\cdot\sqrt{2}\cos 45°$

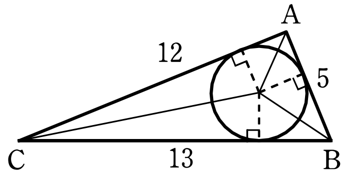
すなわち　　$4a^2=a^2+2-2\cdot a\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

整理すると　　$3a^2+2a-2=0$

これを解いて　　$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

$a>0$ であるから　　$a=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

$\boxed{5}$ (1)　この三角形は $A=90°$ の直角三角形であるから，その面積 S は



$$S=\frac{1}{2}\times 12\times 5=30$$

また，三角形に内接する円の半径を r とすると

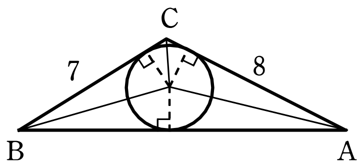
$$S=\frac{1}{2}r(13+12+5)=15r$$

よって，$15r=30$ から　　$r=2$

参考　$\cos A$ を計算すると　　$\cos A=\dfrac{12^2+5^2-13^2}{2\cdot 12\cdot 5}=0$

よって，$A=90°$ であることがわかる。

(2)　△ABC の面積を S とすると



$$S=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot \sin 120°$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}$$

余弦定理により　　$c^2=7^2+8^2-2\cdot 7\cdot 8\cos 120°=49+64-2\cdot 7\cdot 8\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=169$

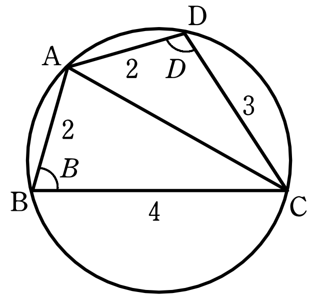
$c>0$ であるから　　$c=\sqrt{169}=13$

また，三角形に内接する円の半径を r とすると　　$S=\dfrac{1}{2}r(7+8+13)=14r$

よって，$14r=14\sqrt{3}$ から　　$r=\sqrt{3}$

6 (1) △ABC に余弦定理を使うと

$$\mathrm{AC}^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos B$$
$$=20-16\cos B \quad \cdots\cdots ①$$



また，四角形 ABCD は円に内接するから

$$D+B=180^\circ$$

よって　$D=180^\circ-B$

△ACD に余弦定理を使うと

$$\mathrm{AC}^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos(180^\circ-B)$$
$$=13+12\cos B \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　$20-16\cos B=13+12\cos B$　　整理すると　$28\cos B=7$

よって　$\cos B=\dfrac{1}{4}$

したがって，① から　$\mathrm{AC}^2=20-16\cos B=20-16\cdot\dfrac{1}{4}=16$

$\mathrm{AC}>0$ であるから　$\mathrm{AC}=4$

(2) $\sin B>0$ であるから　$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

したがって　$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin B+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin(180^\circ-B)$$
$$=4\sin B+3\sin B$$
$$=7\sin B$$
$$=\frac{7\sqrt{15}}{4}$$

7 (1) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R}$$

$\sin A=\sin B$ から　$\dfrac{a}{2R}=\dfrac{b}{2R}$　　すなわち　$a=b$

よって，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形である。

(2) 正弦定理により　$\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R}$

また，余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$\sin A\cos A=\sin B\cos B$ から　$\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

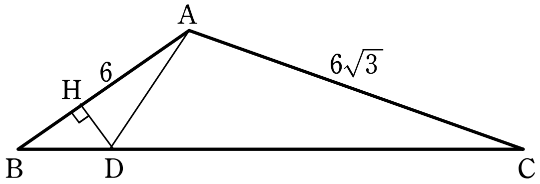
よって　$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$　　すなわち　$a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4$

ゆえに　$(a^2-b^2)(a^2+b^2)-(a^2-b^2)c^2=0$　　よって　$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$ または $a^2+b^2=c^2$

したがって，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形 または ∠C＝90° の直角三角形である。

$\boxed{8}$



$\triangle$ABC において，余弦定理により

$$\mathrm{BC}^2=6^2+(6\sqrt{3})^2-2\cdot6\cdot6\sqrt{3}\cos A=36+108-72\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=216$$

BC$>$0 であるから　　$\mathrm{BC}=\sqrt{216}={}^{\text{ア}}6\sqrt{{}^{\text{イ}}6}$

$\triangle$ABC において，正弦定理により　$\dfrac{6\sqrt{6}}{\sin A}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sin B}$

よって　　$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin A$　…… ①

ここで　　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

これを ① に代入して　$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ウ}}3}}{{}^{\text{エ}}3}$

点 D から辺 AB に下ろした垂線を DH とすると

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AH}+\mathrm{BH}=\mathrm{AD}\cos\angle\mathrm{BAD}+\mathrm{BD}\cos B$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{AD}+\mathrm{BD}\cdot\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{AD}+\frac{\sqrt{{}^{\text{オ}}6}}{{}^{\text{カ}}3}\mathrm{BD}\quad\cdots\cdots ②$$

また，$\triangle$ABD において，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AD}}{\sin B}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin\angle\mathrm{BAD}}$　…… ③

ここで　　$\sin\angle\mathrm{BAD}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAD}}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$

よって，③ から　$\mathrm{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\div\dfrac{1}{3}\times\mathrm{BD}=\sqrt{{}^{\text{キ}}3}\,\mathrm{BD}$

ゆえに　　$\mathrm{BD}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AD}$

② に代入して　　$\mathrm{AB}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{AD}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AD}$

すなわち　　$6=\sqrt{2}\,\mathrm{AD}$

したがって　　$\mathrm{AD}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}={}^{\text{ク}}3\sqrt{{}^{\text{ケ}}2}$