第３５章　有名曲線（数Ⅲ，Ⅰ講分）

A問題

35-A-1　F409A

次の媒介変数表示はどのような曲線を表すか.

(1) $\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = t + 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 3\tan\theta \\ y = \dfrac{2}{\cos\theta} \end{cases}$

35-A-2

曲線 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸および直線 $x = \pi$ とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。

35-A-3　F414B　＊

座標平面上の円 C : $x^2 + y^2 = 16$ の内側を半径 1 の円 D が滑らずに転がる．さらに，時刻 t において，D は点 $\mathrm{T}(4\cos t,\ 4\sin t)$ で C と接している.

時刻 0 において，点 $(4,\ 0)$ にあった D 上の点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ を求めよ.

35-A-4　F415C　＊

座標平面上に原点 O を中心とする半径 2 の円 C_1 がある．半径 1 の円 C_2 が C_1 に外接しながら滑ることなく転がるとき，C_2 上の定点 P が描く曲線について考える．C_2 の中心を Q とし，Q が点 $(3,\ 0)$ にあるとき，P は点 $(2,\ 0)$ にあるとする．

x 軸の正の方向から線分 OQ に測った角を θ とするとき，P の座標 $(x,\ y)$ を θ を用いて表せ．

35-A-5　F416C　＊

原点 O を中心とする半径 2 の円 C に，長さ 4π の糸が一端を点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ に固定して，時計回りに巻きつけてある．この糸の他端 P を引っ張りながらほどいていく．糸と円 C の接点を T，$\angle \mathrm{AOT} = \theta$ とする．T が A と一致するまでに P が描く曲線の方程式を，媒介変数 θ を用いて表せ．

B問題

35-B-1　F412B　＊

次の媒介変数表示はどのような曲線を表すか.

(1) $\begin{cases} x = \dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 2\left(t + \dfrac{1}{t} + 1\right) \\ y = t - \dfrac{1}{t} \end{cases}$

35-B-2

円 C : $x^2+y^2=9$ の内側を半径 1 の円 D が滑らずに転がる。時刻 t において D は点 $(3\cos t,\ 3\sin t)$ で C に接している。

(1) 時刻 $t=0$ において点 (3，0) にあった D 上の点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。$0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ とする。

(2) (1) の範囲で点 P の描く曲線の長さを求めよ。

35-B-3

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。半径 $\dfrac{1}{n}$(n は自然数)の円 C_n が ,C に外接しながらすべることなく反時計回りに転がるとき，C_n 上の点 P の軌跡を考える。ただし，最初 P は点 A(1 , 0) に一致していたとする。

(1) O を端点とし C_n の中心を通る半直線が x 軸の正の向きとなす角が θ となるときの P の座標を n と θ で表せ。

(2) P が初めて A に戻るまでの P の軌跡の長さ l_n を求めよ。

(3) (2) で求めた l_n に対し，$\lim_{n\to\infty} l_n$ を求めよ。

35-B-4 ＊

$a>0$ とする。長さ $2\pi a$ のひもの一方の端が半径 a の円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 A$(a,\ 0)$ に固定してあり，その円に時計回りに巻きつけてある。このひもをピンと伸ばしながら円からはずしていくとき，ひもの他方の端 P が描く曲線の長さを求めよ。

35-B-5　＊

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。媒介変数 t で表された曲線 $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin 3t \end{cases}$ を C とする。

(1) 曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

(2) 曲線 C で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転して得られる図形の体積を求めよ。

35-B-6　F21B

座標平面上を運動する点Pがある。点Pは点 $(0,\ 1)$ を出発して，曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(x \geqq 0)$ 上を毎秒1の速さで動いている。点Pの t 秒後の座標を $(f(t),\ g(t))$ で表すとき，$f(t)$，$g(t)$ を求めよ。

35-B-7

曲線 $y=e^{-x}\sin x\ (x \geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形で，x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に S_0，S_1，……，S_n，…… とするとき，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k$ を求めよ。

C問題

35-C-1　F421B　（再掲）

座標上の 2 定点 A$(\sqrt{2},\ 0)$，B$(-\sqrt{2},\ 0)$ に対して，条件 $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=2$ を満たして動く点 P$(x,\ y)$ を考える．$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4},\ r>0\right)$ とする．

(1)　$r^2=4\cos 2\theta$ が成り立つことを示せ．

(2)　三角形 PAB の面積の最大値を求めよ．また，このときの点 P の座標を求めよ．

35-C-2　F423C

xy 平面で原点 O を極とし，x 軸の正の向きを始線とする極座標を考える．

この極座標で $r=f(\theta)=1-\cos\theta$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi\right)$ と表される曲線 C と，x 軸，y 軸とで囲まれる領域の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

で与えられることを示し，この値を求めよ．

35-C-3 F424C

(1) a，e を正の定数，点 A の極座標を $(a,\ 0)$ とし，A を通り始線 OX に垂直な直線を l とする．点 P から l に下ろした垂線の足を H とするとき，$e = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$ であるような点 P の軌跡の極方程式を求めよ．ただし，極を O とする．

(2) $e > 1$ のとき，(1) で求めた P の軌跡の極方程式を，直交座標に関する方程式で表せ．

(3) 双曲線 H の 2 つの弦 AB，CD が H の 1 つの焦点 F を通り，互いに直交するとき，

$$\frac{1}{\mathrm{AB}} + \frac{1}{\mathrm{CD}}$$

の値は一定であることを示せ．