

試験時間60分 解答は解答用紙に書いて、提出してください

- 1 関数  $y = \sin^3 2x$  を微分せよ。
- 2  $y = e^x \sin x$  とすると、 $y'' = \square$  である。
- 3 関数  $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$  の導関数を求めよ。
- 4  $x$  について微分可能な関数  $y$  が条件  $x \tan y = 1$  を満たしているとき、 $\frac{dy}{dx}$  を  $x$  で表せ。
- 5 曲線  $2x^2 - 2xy + y^2 = 5$  上の点  $(1, 3)$  における接線の方程式を求めよ。
- 6 曲線  $y = x^{\sin x}$  上で、 $x = \pi$  である点における接線の  $y$  切片を求めよ。
- 7  $t$  を媒介変数として、 $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t^2} \end{cases}$  で表される曲線を  $C$  とする。ここで、 $e$  は自然対数の底である。
- (1)  $\frac{dy}{dx}$  および  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を  $t$  の式で表せ。
- (2) 曲線  $C$  上の  $t=1$  に対応する点における接線の方程式を求めよ。
- 8 2 曲線  $y = ax^3$  と  $y = 3 \log x$  が共有点を持ち、その点における 2 曲線の接線が一致しているとき、 $a$  の値を求めよ。また、その共有点における接線の方程式を求めよ。ただし、 $\log$  は自然対数である。
- 9  $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$  ( $-1 < x < 1$ ) とする。
- (1)  $f(x)$  は奇関数であることを示せ。
- (2) 導関数  $f'(x)$  を求めよ。
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x}$  の値を求めよ。
- 10 次の極限值を求めよ。
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\sin x - x} = \square$$
- 11 数列  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ,  $a_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ ,  $a_4 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}$ , …… は漸化式  $a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を満たしている。 $f(x) = (\sqrt{2})^x$  として、次の問いに答えよ。
- (1)  $0 \leq x \leq 2$  における  $f(x)$  の最大値と最小値を求めよ。
- (2)  $0 \leq x \leq 2$  における  $f'(x)$  の最大値と最小値を求めよ。
- (3)  $0 < a_n < 2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成立することを数学的帰納法を用いて示せ。
- (4)  $0 < 2 - a_{n+1} < (\log 2)(2 - a_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成立することを示せ。
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

1 解答  $y' = 6\sin^2 2x \cos 2x$

2 解答  $2e^x \cos x$

3 解答  $y' = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

4 解答  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2+1}$

5 解答  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

6 解答  $\pi \log \pi + 1$

7 解答 (1)  $\frac{dy}{dx} = -2te^{-t^2-t}$   $\frac{d^2y}{dx^2} = (4t^2 + 2t - 2)e^{-t^2-2t}$  (2)  $y = -\frac{2}{e^2}x + \frac{3}{e}$

8 解答  $a = \frac{1}{e}$ ,  $y = \frac{3}{\sqrt[3]{e}}x - 2$

9 解答 (1) 略 (2)  $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$  (3) 2

10 解答 -1

11 解答 (1)  $x=2$  で最大値 2,  $x=0$  で最小値 1

(2)  $x=2$  で最大値  $\log 2$ ,  $x=0$  で最小値  $\frac{1}{2} \log 2$

(3) 略

(4) 略

(5) 2

1  $y' = 3\sin^2 2x \cdot 2\cos 2x = 6\sin^2 2x \cos 2x$

2  $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$  より、  
 $y'' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$   
 $= 2e^x \cos x$

3  $y' = \frac{\cos x(\sin x + \cos x) - \sin x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

4  $x \tan y = 1$  から  $\tan y = \frac{1}{x}$  …… ①

①の両辺を  $x$  で微分すると  $\frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$

よって  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \cos^2 y = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 y} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{x^2 + 1}$

5  $2x^2 - 2xy + y^2 = 5$  の両辺を  $x$  で微分すると  $4x - 2(y + xy') + 2yy' = 0$

ゆえに  $y'(y - x) + 2x - y = 0$   $x = 1, y = 3$  のとき  $y' = \frac{1}{2}$

よって、求める接線の方程式は  $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$  すなわち  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

6  $y = x^{\sin x}$  ( $x > 0$ ) の両辺の自然対数をとると  $\log y = \sin x \log x$

この両辺を  $x$  について微分すると  $\frac{y'}{y} = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x}$

すなわち  $y' = x^{\sin x} \left( \cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right)$

$x = \pi$  のとき  $y = 1, y' = -\log \pi$  であるから、 $x = \pi$  である点における接線の方程式は

$$y - 1 = (-\log \pi)(x - \pi)$$

$x = 0$  を代入して整理すると  $y = \pi \log \pi + 1$

よって、この接線の  $y$  切片は  $\pi \log \pi + 1$

7 (1)  $\frac{dx}{dt} = e^t, \frac{dy}{dt} = -2te^{-t^2}$   $\frac{dx}{dt} = e^t > 0$  であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2te^{-t^2}}{e^t} = -2te^{-t^2-t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} (-2te^{-t^2-t}) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \{-2e^{-t^2-t} + (-2t) \cdot (-2t-1)e^{-t^2-t}\} \cdot \frac{1}{e^t}$$

$$= (4t^2 + 2t - 2)e^{-t^2-2t}$$

(2)  $t = 1$  のとき  $x = e, y = \frac{1}{e}, \frac{dy}{dx} = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$

よって、求める接線の方程式は  $y - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e^2}(x - e)$

すなわち  $y = -\frac{2}{e^2}x + \frac{3}{e}$

8  $f(x) = ax^3, g(x) = 3\log x$  とすると  $f'(x) = 3ax^2, g'(x) = \frac{3}{x}$

2 曲線の共有点の  $x$  座標を  $p$  とすると、 $f(p) = g(p)$  であるから

$$ap^3 = 3\log p \dots\dots \textcircled{1}$$

2 曲線の共有点における接線が一致するから、 $f'(p) = g'(p)$  より

$$3ap^2 = \frac{3}{p} \quad \text{すなわち} \quad ap^3 = 1 \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ② から  $3\log p = 1$  よって  $p = e^{\frac{1}{3}}$

これを ② に代入して  $ae = 1$  ゆえに  $a = \frac{1}{e}$

共有点の座標は  $(e^{\frac{1}{3}}, 1)$  であるから、求める接線の方程式は

$$y - 1 = \frac{3}{e^{\frac{1}{3}}}(x - e^{\frac{1}{3}}) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{3}{\sqrt[3]{e}}x - 2$$

9 (1)  $f(-x) = \log \frac{1-x}{1+x} = \log \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -\log \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$

ゆえに、 $f(x)$  は奇関数である。

(2)  $-1 < x < 1$  から  $1+x > 0, 1-x > 0$

よって  $f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$

ゆえに  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x) + (1+x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

(3)  $f(0) = \log 1 = 0$  から 与式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$

(2) から  $f'(0) = \frac{2}{1-0^2} = 2$  よって、求める値は 2

10  $f(x) = \sin x$  とおく。 $f(x)$  は常に微分可能であり  $f'(x) = \cos x$

平均値の定理により

$$\frac{f(x) - f(\sin x)}{x - \sin x} = f'(c), \quad \sin x < c < x \quad \text{または} \quad x < c < \sin x$$

を満たす実数  $c$  が存在する。

$x \rightarrow 0$  のとき、 $\sin x \rightarrow 0$  であるから、はさみうちの原理により  $\lim_{x \rightarrow 0} c = 0$

よって (与式)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{f(x) - f(\sin x)}{x - \sin x} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \{-f'(c)\} = \lim_{x \rightarrow 0} (-\cos c)$

$$= -\cos 0 = -1$$

11 (1) 底  $\sqrt{2}$  は1より大きいから、関数  $f(x)$  は単調に増加する。

よって、 $0 \leq x \leq 2$  のとき、 $f(x)$  は  $x=2$  で最大値2、 $x=0$  で最小値1をとる。

(2)  $f'(x) = (\sqrt{2})^x \log \sqrt{2}$

よって、 $f'(x)$  は単調に増加するから、 $0 \leq x \leq 2$  のとき、 $f'(x)$  は

$x=2$  で最大値  $\log 2$ 、 $x=0$  で最小値  $\frac{1}{2} \log 2$  をとる。

(3) 「 $0 < a_n < 2$ 」を①とする。

[1]  $n=1$  のとき

$a_1 = \sqrt{2}$  であるから、 $n=1$  のとき①は成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき①が成り立つ、すなわち  $0 < a_k < 2$  が成り立つと仮定する。

$n=k+1$  のとき  $a_{k+1} = (\sqrt{2})^{a_k}$

(1) から、 $0 < a_k < 2$  のとき  $f(0) < f(a_k) < f(2)$

すなわち  $(\sqrt{2})^0 < (\sqrt{2})^{a_k} < (\sqrt{2})^2$  よって  $1 < a_{k+1} < 2$

したがって、 $n=k+1$  のときにも①は成り立つ。

[1], [2] から、①はすべての自然数  $n$  に対して成り立つ。

(4) (3) から  $0 < 2 - a_{n+1}$  は成り立つ。

区間  $[a_n, 2]$  において、 $f(x) = (\sqrt{2})^x$  に平均値の定理を用いると

$$\frac{f(2) - f(a_n)}{2 - a_n} = f'(c_n) \quad (a_n < c_n < 2)$$

を満たす  $c_n$  が存在する。

(2) から、 $a_n < c_n < 2$  のとき  $f'(c_n) < \log 2$

また、 $f(2) = 2$ 、 $f(a_n) = a_{n+1}$  であるから  $\frac{2 - a_{n+1}}{2 - a_n} < \log 2$

$2 - a_n > 0$  から  $2 - a_{n+1} < (\log 2)(2 - a_n)$

以上から  $0 < 2 - a_{n+1} < (\log 2)(2 - a_n)$

(5) (4) から  $0 < 2 - a_n < (\log 2)(2 - a_{n-1}) < \dots < (\log 2)^{n-1}(2 - a_1)$

$0 < \log 2 < 1$  から  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log 2)^{n-1}(2 - a_1) = 0$

はさみうちの原理により  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - a_n) = 0$  よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$