三角関数基本チェック

【例題 01】　$0 \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $2\cos 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{3} = 2$ を解け

【例題 02】　関数 $f(x) = 3\sin 2x - 4\cos 2x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 03】　関数 $f(x) = \sin 2x - \sin x - \cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 04】　関数 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 4\cos^2 x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 05】　関数 $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x - 2}$ の最大値と最小値を求めよ。

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 三角関数篇

標準問題

⑫6-標-1

α, β は鋭角とする。

$$\begin{cases} \sin\alpha+\sin\beta+2\cos\gamma=0 \\ \cos\alpha+\cos\beta+2\sin\gamma=0 \end{cases}$$

のとき，$\alpha=\beta$ となることを証明せよ。

⑫6-標-2

$\triangle$ABC において，

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

が成り立つことを証明せよ。

⑫6-標-3

（1）$\sin 2x-\sin x-2\cos x+1\leq 0 \quad (0\leq x<2\pi)$ を解け

（2）次の連立方程式を解け

$$\begin{cases} \cos 2x-3\sin x+1\leq 0 \\ \cos 2x+3\cos x-1\geq 0 \end{cases} \quad (0\leq x<2\pi)$$

⑫6-標-4

（1）$\cos 5\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表せ。

（2）$\cos^2 18^\circ$，$\cos 36^\circ$ の値を求めよ。

（3）一辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求めよ。

⑫**6-標-5**

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において,

$$\begin{cases} f(\theta) = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta \\ g(\theta) = \cos 4\theta - \sqrt{3}\sin 4\theta \end{cases}$$

とするとき，$f(\theta)$, $g(\theta)$ の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ。

⑫**6-標-6**

点 (x, y) が，原点 O を中心とする半径 2 の円周上，第 1 象限の部分を動くとき，$x^2 + 4xy - 2y^2$ のとり得る値の範囲を求めよ。

⑫**6-標-7**

（1）$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{5}$ のとき，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

（2）$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan\theta + \sin\theta > 4\tan\dfrac{\theta}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

⑫**6-標-8**

次の式の値を求めよ。

（1）$\sin 10° \sin 50° \sin 70°$

（2）$\sin 10° + \sin 50° - \sin 70°$

⑫**6-標-9**

△ABC において，$\cos A+\cos B+\cos C-4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ の値は一定値になる。この値を求めよ。

⑫**6-標-10**

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

$f(\theta)=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta$，$g(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$ とする。

(1) $f(\theta)$, $g(\theta)$ の最大値，最小値を求めよ。

(2) $g(\theta)=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ のとき，$\sin\theta$ を求めよ。

計算問題（自習用）

⑫**6-標-11**

（1） $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$　ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする。

このとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

（2） α は第１象限，β は第３象限の角で，$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$ のとき，

$\cos(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

⑫**6-標-12**

（1） α, β, γ は鋭角で，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{5}$, $\tan\gamma=\dfrac{1}{8}$ のとき，$\alpha+\beta+\gamma$ を求めよ。

（2） $y=3x$ と $y=\dfrac{1}{2}x$ のなす角を求めよ。

⑫**6-標-13**

方程式 $\sin 2\theta-\sin\theta-2\cos\theta+1=0$ $(0\leq\theta<2\pi)$ を解け。

⑫**6-標-14**

次の方程式を解け

（1） $\cos 2\theta-3\cos\theta+2=0$

（2） $\cos 2\theta-\sin\theta<0$　$(0\leq\theta<2\pi)$

⑫**6-標-15**

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin 3\theta+\cos 3\theta$ の値を求めよ。

⑫**6-標-16**

関数 $f(x)=2\sqrt{3}\cos^2 x+6\sin x\cos x+8\sqrt{3}\sin^2 x$　$(0\leq x\leq\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。

⑫**6-標-17**

（1） $\cos 5\theta\sin 3\theta$ を和または差の形に変換せよ。

（2） $\cos 20^\circ\cos 80^\circ\cos 140^\circ$ の値を求めよ。

⑫**6-標-18**

（1） $\sin 5\theta-\sin 3\theta$ を積の形に変換せよ。

（2） $\cos 10^\circ+\cos 110^\circ+\cos 230^\circ$ の値を求めよ。

発展問題

⑫6-発-1

xy 平面において，O を原点，A を定点 $(1,0)$ とする。また，P，Q は円 $x^2+y^2=1$ 上を動く 2 点であって，線分 OA から正の向きに回って線分 OP に至る角と，線分 OP から正の向きに回って線分 OQ に至る角が等しいという関係が成り立っているものとする。

点 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を R，点 Q を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を S とする。実数 $l \geq 0$ を与えたとき，線分 RS の長さが l と等しくなるような点 P, Q の位置は何通りあるか。

⑫6-発-2

実数 x, y が $11x^2+12xy+6y^2=4$ を満たしながら動くとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

⑫6-発-3

$0 \leq \theta \leq \pi$ である θ に対して，$\dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta+2}$ の最大値，最小値を求めよ。

⑫**6-発-4**

(1)　$x=\sin 10^\circ$ を解とする x の 3 次方程式をつくれ。ただし，x^3 の係数は 1 とする。

(2)　(1)の 3 次方程式の残りの 2 解を $\sin\alpha$, $\sin\beta$ とする。α, β の値を求めよ。

ただし，$-90^\circ<\alpha<\beta<90^\circ$ とする。

⑫**6-発-5**

次の関係を満たす (x,y) の存在範囲を図示せよ。

$$\cos x-\cos y\cos(x+y)>0,\ 0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le 2\pi$$

SoyPaste 三角関数

SP⑫6-1(r1-1)

Oを原点とする座標平面上に，2点A($\cos\theta$, 0)，B(0, $\sin\theta$)をとる．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) 線分OA，OBの長さの和の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(2) 三角形OABの面積の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(1) $L=\mathrm{OA}+\mathrm{OB}$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}+\mathrm{OB}&=\cos\theta+\sin\theta\\&=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

これと $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，L は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，

$$\text{最大値}\ \sqrt{2}$$

をとる．

(2) 三角形OABの面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\\&=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\\&=\frac{1}{4}\sin 2\theta.\end{aligned}$$

これと $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，S は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，

$$\text{最大値}\ \frac{1}{4}$$

をとる．

SP⑫6-2(r23-1) ○

a，b，c，d を定数とする．ただし，$b>0$，$c>0$，$0 \leqq d < 2\pi$ とする．

関数 $f(x)=a+b\sin(cx+d)$ が周期 6π の関数で，$x=\pi$ で最小値 -2 をとり，最大値が 38 であるとき，a，b，c，d の値を求めよ．

$c>0$，$f(x)$ の周期が 6π であることから，

$$c=\frac{1}{3}.$$

さらに，$b>0$ であり，$f(x)$ が $x=\pi$ で最小となることから，

$$\frac{\pi}{3}+d=\frac{3}{2}\pi$$

なので，

$$d=\frac{7}{6}\pi.$$

したがって，

$$f(x)=a+b\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{7}{6}\pi\right)$$

なので，最小値が -2，最大値が 38 であることと，$b>0$ より，

$$\begin{cases} a+b=38, \\ a-b=-2. \end{cases}$$

これを解くと，

$$a=18,\quad b=20.$$

以上より，

$$a=18,\quad b=20,\quad c=\frac{1}{3},\quad d=\frac{7}{6}\pi.$$

SP⑫6-3（r37-2） ○

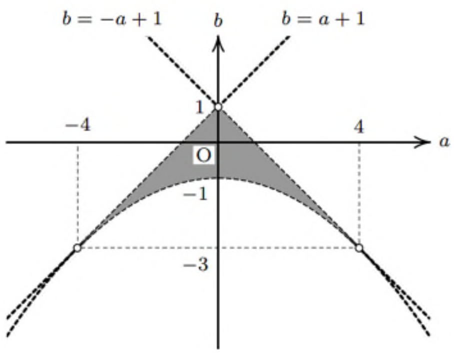
方程式 $\cos 2x + a\sin x + b = 0$ が，$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲に異なる 4 つの実数解をもつとする．

(1) 実数 a，b の満たす条件を求めよ．

(2) (1) の条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の表す領域を図示せよ．

(1)
$$\cos 2x + a\sin x + b = 0 \qquad \cdots\ (*)$$
より，
$$1 - 2\sin^2 x + a\sin x + b = 0.$$
$\sin x = t$ とすると，$-1 \leqq t \leqq 1$ であり，
$$2t^2 - at - b - 1 = 0.$$
ここで，
$$f(t) = 2t^2 - at - b - 1$$
とすると，
$$f(t) = 2\left(t - \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} - b - 1.$$
$(*)$ が $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲に異なる 4 つの実数解をもつのは t の方程式 $f(t) = 0$ が $-1 < t < 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつときであるから，条件は，
$$\begin{cases} -1 < \dfrac{a}{4} < 1, \\ f\left(\dfrac{a}{4}\right) < 0, \\ f(1) > 0, \\ f(-1) > 0. \end{cases}$$
これより，a，b の満たす条件は，
$$\begin{cases} -4 < a < 4, \\ b > -\dfrac{a^2}{8} - 1, \\ b < -a + 1, \\ b < a + 1. \end{cases}$$

(2) (1) の結果を図示すると，次の図の網目部分である．
ただし，境界線上の点は含まない．



SP⑫6-4 (s1-1)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ とし，x の 2 次方程式

$$x^2 - 2(\cos\theta + \sin\theta)x + 1 + 2\cos^2\theta = 0 \qquad \cdots (*)$$

の解を α，β とする．ただし，重解の場合は $\alpha = \beta$ とする．

(1) $(*)$ が実数解をもつような θ の値の範囲を求めよ．

(2) θ の値が (1) で求めた範囲を変化するとき，$\alpha^2 + \beta^2$ の最大値を求めよ．

(3) θ の値が (1) で求めた範囲を変化するとき，$\alpha^2 + \beta^2$ の最小値と，そのときの θ の値をすべて求めよ．

(1) ($(*)$ の判別式) $\geqq 0$ より，

$$(\cos\theta + \sin\theta)^2 - (1 + 2\cos^2\theta) \geqq 0$$

であるから，

$$2\sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta \geqq 0$$

$$\sin 2\theta - \cos 2\theta \geqq 1$$

$$\sqrt{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \geqq 1.$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，

$$\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi.$$

(2) 解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2(\cos\theta + \sin\theta), \\ \alpha\beta = 1 + 2\cos^2\theta. \end{cases}$$

また，$f(\theta) = \alpha^2 + \beta^2$ とすると，

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 4(\cos\theta + \sin\theta)^2 - 2(1 + 2\cos^2\theta) \\ &= 4\sin 2\theta - 2\cos 2\theta \\ &= 2\sqrt{5}\sin(2\theta - \phi). \end{aligned}$$

ただし，ϕ は $\cos\phi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\phi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を満たす最小の正の角とする．

$0 \leqq \theta < 2\pi$ なので，$f(\theta)$，すなわち，$\alpha^2 + \beta^2$ の最大値は，

$$2\sqrt{5}.$$

(3) $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\frac{\pi}{2} - \phi \leqq 2\theta - \alpha \leqq \pi - \phi$$

であり，$\dfrac{5}{4}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，

$$\frac{5}{2}\pi - \phi \leqq 2\theta - \phi \leqq 3\pi - \phi.$$

さらに，$0 < \phi < \dfrac{\pi}{4}$ であるから，$f(\theta)$，すなわち，$\alpha^2 + \beta^2$ は，

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \text{ のとき，最小値 } 2$$

をとる．

SP⑫6-5 (j19-3)　○

関数 $f(x) = -\cos^2 2x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値をそれぞれ求めよ．

$f(x)$ の定め方より，

$$\begin{aligned} f(x) &= -(1-\sin^2 2x) - \sqrt{3}\sin 2x + 2 \\ &= \left(\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

また，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0 \leqq 2x \leqq \pi$ なので，

$$0 \leqq \sin 2x \leqq 1.$$

したがって，$f(x)$ は，

$$x = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\ \text{のとき，最小値}\ \frac{1}{4},$$

$$x = 0,\ \frac{\pi}{2}\ \text{のとき，最大値}\ 1$$

をとる．

SP⑫6-6 (s19-1) ☆

a，b は実数の定数とする．すべての実数 x，y に対して，不等式

$$a(x^2+y^2) \leqq x^2+3xy+5y^2 \leqq b(x^2+y^2)$$

が成り立つような a，b のうち，最大の a と最小の b を求めよ．

$$a(x^2+y^2) \leqq x^2+3xy+5y^2 \leqq b(x^2+y^2) \qquad \cdots (*)$$

に対して，

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

とすると，

$$a \leqq \cos^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta + 5\sin^2\theta \leqq b.$$

ここで，

$$f(\theta) = \cos^2\theta + 3\sin\theta\cos\theta + 5\sin^2\theta$$

とすると，

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{2}\sin 2\theta + 5\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2}\sin(2\theta+\alpha)+3 \\ &\left(\text{ただし，}\quad \cos\alpha = \frac{3}{5},\quad \sin\alpha = -\frac{4}{5}\ \text{とする}\right) \end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{1}{2} \leqq f(\theta) \leqq \frac{11}{2}.$$

したがって，$(*)$ を満たす最大の a と最小の b はそれぞれ，

$$\frac{1}{2},\quad \frac{11}{2}.$$

SP⑫6-7 (j22-3)　○

曲線 $2x^2+y^2-4y=0$ を C とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が曲線 C 上を動くとき，xy の最大値と最小値を求めよ．

C の方程式

$$2x^2+y^2-4y=0$$

を変形すると，

$$\frac{x^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

であるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数 θ を用いて，

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=2\sin\theta+2 \end{cases}$$

とおける．

このとき，

$$xy=2\sqrt{2}\cos\theta(\sin\theta+1)$$

であるから，

$$f(\theta)=\cos\theta(\sin\theta+1)$$

とすると，

$$\begin{aligned} f'(\theta)&=-\sin\theta(\sin\theta+1)+\cos^2\theta \\ &=-(2\sin^2\theta+\sin\theta-1) \\ &=-(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1). \end{aligned}$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(\theta)$	1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	(1)

これより，$f(\theta)$ は，

$$x=\frac{\pi}{6}\text{のとき，}\quad\text{最大，}$$

$$x=\frac{5}{6}\pi\text{のとき，}\quad\text{最小}$$

となるので，xy の

$$\text{最大値は } \frac{3\sqrt{6}}{2},\quad \text{最小値は } -\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

SP⑫6-8 (j31-2) ☆

すべての x に対して，

$$\sin(x-a)+2\cos(x-a)+b\sin x\sin 2a=0$$

が成り立つとき，$\tan a$ および b の値を求めよ．ただし，$0<a<\frac{\pi}{2}$ とする．

$$\sin(x-a)+2\cos(x-a)+b\sin x\sin 2a=0 \qquad \cdots ①$$

において，$x=0$ とすると，

$$\sin(-a)+2\cos(-a)=0$$

$$-\sin a+2\cos a=0$$

であるから，$0<a<\frac{\pi}{2}$ より，

$$\frac{\sin a}{\cos a}=2$$

なので，

$$\tan a=2. \qquad \cdots ②$$

また，①において，$x=a$ とすると，

$$2+b\sin a\sin 2a=0$$

であるから，

$$2+2b\sin^2 a\cos a=0. \qquad \cdots ③$$

ここで，②と $0<a<\frac{\pi}{2}$ より，

$$\cos a=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin a=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

であるから，③より，

$$2+\frac{8}{5\sqrt{5}}b=0.$$

したがって，

$$b=-\frac{5\sqrt{5}}{4}. \qquad \cdots ④$$

②，④が成り立つとき，

$$\begin{aligned}(①の左辺)&=\sin x\cos a-\cos x\sin a\\&\quad+2(\cos x\cos a+\sin x\sin a)\\&\quad-\frac{5\sqrt{5}}{4}\sin x\sin 2a\\&=\sqrt{5}\sin x-\frac{5\sqrt{5}}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x\\&=0\end{aligned}$$

であるから，①はすべての x に対して成り立つ．

以上より，

$$\tan a=2,\quad b=-\frac{5\sqrt{5}}{4}.$$

SP⑫6-9 (j35-2) △

2つの関数

$$t=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,$$

$$y=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする．

(1) $\cos 3\theta$ を t の関数で表せ．

(2) y を t の関数で表せ．

(3) $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，y の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ．

(1) $t^3=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^3$ より，

$$\begin{aligned}t^3&=\cos^3\theta+3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta+9\cos\theta\sin^2\theta+3\sqrt{3}\sin^3\theta\\&=\cos^3\theta+3\sqrt{3}(1-\sin^2\theta)\sin\theta\\&\qquad\qquad+9\cos\theta(1-\cos^2\theta)+3\sqrt{3}\sin^3\theta\\&=-8\cos^3\theta+9\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta\\&=-2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+3\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta\\&=-2\cos 3\theta+3(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)\\&=-2\cos 3\theta+3t\end{aligned}$$

であるから，

$$\cos 3\theta=\frac{1}{2}(3t-t^3).$$

(2) $t^2=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2$ より，

$$\begin{aligned}t^2&=\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta\\&=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)+\sqrt{3}\sin 2\theta+\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)\\&=2-(\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta)\end{aligned}$$

であるから，

$$\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta=2-t^2.$$

したがって，

$$\begin{aligned}y&=-4\cos 3\theta+(\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta)+2(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)\\&=-2(3t-t^3)+(2-t^2)+2t\\&=2t^3-t^2-4t+2.\end{aligned}$$

(3) (2) の結果より，

$$\begin{aligned}y'&=6t^2-2t-4\\&=2(3t+2)(t-1)\end{aligned}$$

であり，

$$t=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\ \text{かつ}\ 0\leqq\theta\leqq\pi$$

より，

$$-1\leqq t\leqq 2$$

であるから，この範囲における y の増減は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	3	↗	$\frac{98}{27}$	↘	-1	↗	6

これより，y は，

$t=2$，すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，最大値 6，

$t=1$，すなわち，$\theta=0$，$\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，最小値 -1

をとる．

SP⑫6-10 (j42-1) ○

$\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 8\theta\cos 16\theta\cos 32\theta$ は sin を使った最も簡単な式で表すと (　　) となるので,

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ\cos 320^\circ\cos 640^\circ$$

の値は (　　) であることがわかる.

$f(\theta)=\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 8\theta\cos 16\theta\cos 32\theta$ とすると,

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

であるから,

$$\begin{aligned}
f(\theta)&=\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 8\theta\cos 16\theta\cos 32\theta\\
&=\frac{1}{4}\sin 4\theta\cos 4\theta\cos 8\theta\cos 16\theta\cos 32\theta\\
&=\frac{1}{8}\sin 8\theta\cos 8\theta\cos 16\theta\cos 32\theta\\
&=\frac{1}{16}\sin 16\theta\cos 16\theta\cos 32\theta\\
&=\frac{1}{32}\sin 32\theta\cos 32\theta\\
&=\frac{1}{64}\sin 64\theta.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
&\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ\cos 320^\circ\cos 640^\circ\\
=&\frac{f(20^\circ)}{\sin 20^\circ}\\
=&\frac{1}{64}\cdot\frac{\sin 1280^\circ}{\sin 20^\circ}\\
=&-\frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

SP⑫6-11 (s42-3) ☆

次の問に答えよ．ただし，t は $0<t<1$ を満たす実数とする．

(1) 次の等式を証明せよ．

$$\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{4}\cos\frac{t}{8}=\frac{\sin t}{8\sin\frac{t}{8}}$$

(2) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を t を用いて表せ．

$$a_1=\cos\frac{t}{2},\quad a_n=a_{n-1}\cos\frac{t}{2^n}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(3) 数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を次のように定義する．

$$b_1=\sqrt{\frac{1}{2}},\quad b_n=\sqrt{\frac{1+b_{n-1}}{2}}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

$$c_1=\sqrt{\frac{1}{2}},\quad c_n=c_{n-1}b_n\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき，$\lim_{n\to\infty}c_n$ を求めよ．

(1) 2 倍角の公式を用いると，

$$\begin{aligned}8\sin\frac{t}{8}\cos\frac{t}{8}\cos\frac{t}{4}\cos\frac{t}{2}&=4\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}\cos\frac{t}{2}\\&=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\\&=\sin t\end{aligned}$$

であり，$\sin\frac{t}{8}\neq0$ より，

$$\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{4}\cos\frac{t}{8}=\frac{\sin t}{8\sin\frac{t}{8}}.$$

(2) $a_n=a_{n-1}\cos\frac{t}{2^n}$ の両辺に $\sin\frac{t}{2^n}$ を掛けると，

$$\sin\frac{t}{2^n}a_n=\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2^{n-1}}a_{n-1}.$$

これより，

$$\sin\frac{t}{2^n}a_n=a_1\sin\frac{t}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから，$a_1=\cos\frac{t}{2}$ より，

$$\sin\frac{t}{2^n}a_n=\sin t\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

したがって，

$$a_n=\frac{\sin t}{2^n\sin\frac{t}{2^n}}.$$

これより，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\frac{t}{2^n}}{\sin\frac{t}{2^n}}\\&=\frac{\sin t}{t}.\end{aligned}$$

(3) すべての自然数 n に対して，

$$b_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\qquad\cdots(*)$$

であることを数学的帰納法を用いて示す．

(Ⅰ) $n=1$ のとき，

$$b_1=\sqrt{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$$

であるから，$(*)$ は成り立つ．

(Ⅱ) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する，すなわち，

$$b_k=\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$$

であるとする．

このとき，

$$\begin{aligned}b_{k+1}&=\sqrt{\frac{1+b_k}{2}}\\&=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}{2}}\\&=\sqrt{\frac{1+2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}-1}{2}}\\&=\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}\end{aligned}$$

であるから，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，示せた．

したがって，

$$c_n=c_{n-1}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

なので，(2) において，$t=\frac{\pi}{2}$ としたものであるから，(2) より，

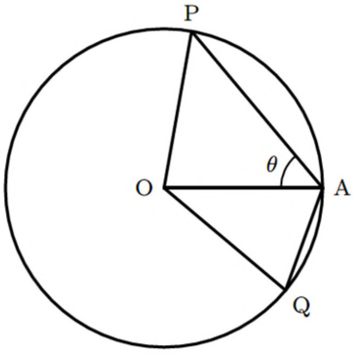
$$\begin{aligned}c_n&=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\\&=\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{2}{\pi}.$$

SP⑫6-12 (j20-5)

図示すると，次のようになる．



$\angle \mathrm{PAQ} = \dfrac{2}{3}\pi$，$\angle \mathrm{OAP} = \theta$ より，

$$\begin{cases} \angle \mathrm{OPA} = \theta, \\ \angle \mathrm{AOP} = \pi - 2\theta, \\ \angle \mathrm{OAQ} = \angle \mathrm{OQA} = \dfrac{2}{3}\pi - \theta, \\ \angle \mathrm{AOQ} = 2\theta - \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

であり，これらの角はすべて正であるから，θ の動ける範囲は，

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

さらに，三角形 OAP，OAQ が二等辺三角形であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{AP} &= 2\cos\theta, \\ \mathrm{AQ} &= 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right) \\ &= \sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta. \end{aligned}$$

また，$\angle \mathrm{PAQ} = \dfrac{2}{3}\pi$，$\angle \mathrm{POQ} = \dfrac{2}{3}\pi$ であるから，

$$\triangle \mathrm{OPQ} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

さらに，

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\theta) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\{\sqrt{3}\sin 2\theta - (1 + \cos 2\theta)\} \\ &= \frac{3}{4}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

であるから，$S(\theta)$ は $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，最大値

$$\frac{\sqrt{3}}{4}$$

をとる．

SP⑫6-13（s28-1）

$f(x)>0$ がすべての実数 x に対して成り立つための条件は $D<0$.

また,

$$\sin^2\theta+3\cos^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{3(1+\cos 2\theta)}{2}=2+\cos 2\theta,$$

$$\frac{3\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=3\tan\theta\cos^2\theta=\frac{3}{2}\sin 2\theta$$

であるから,

$$\begin{aligned}D&=16\left(\frac{3\tan\theta}{1+\tan^2\theta}-\sqrt{3}\right)^2-12(\sin^2\theta+3\cos^2\theta)^2\\&=12(\sqrt{3}\sin 2\theta-2)^2-12(2+\cos 2\theta)^2\\&=12(\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta)(\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta-4).\end{aligned}$$

ここで,

$$\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta<\sqrt{3}+1$$

であるから,

$$\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta-4<0.$$

また,

$$\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

であるから，求める θ の範囲は,

$$0<2\theta+\frac{\pi}{6}<\pi \iff -\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{5}{12}\pi.$$