グラフ予想図　和と積のチェック

問題 1　次の関数の増減と極値を調べて，そのグラフをかけ。

$$y=(1+\cos x)\sin x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$$

$f(x)=(1+\cos x)\sin x$ とおく

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=-\sin x\times\sin x+(1+\cos x)\times\cos x\\
&=-\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}+\cos x+\cos^2 x\\
&=2\cos^2 x+\cos x-1\\
&=(2\cos x-1)(\cos x+1)
\end{aligned}
$$

$f'(x)=0$ となるのは，$\cos x=\dfrac{1}{2},\ -1$

つまり，$x=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5\pi}{3}$ のとき。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5\pi}{3}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

極大値　$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

極小値　$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$f(\pi)=0$

両端　$f(0)=f(2\pi)=0$

$\boxed{\text{問題２}}$　次の関数の増減，凹凸を調べ，グラフをかけ。

$y = xe^{-x}$

$f(x) = xe^{x}$　とおく

$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times e^{-x} \cdot (-1)$

$\quad = (1-x)e^{-x}$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のとき

$f''(x) = -1 \times e^{-x} + (1-x) \times e^{-x} \cdot (-1)$

$\quad = (x-2)e^{-x}$

$f''(x) = 0$ となるのは $x = 2$ のとき

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘

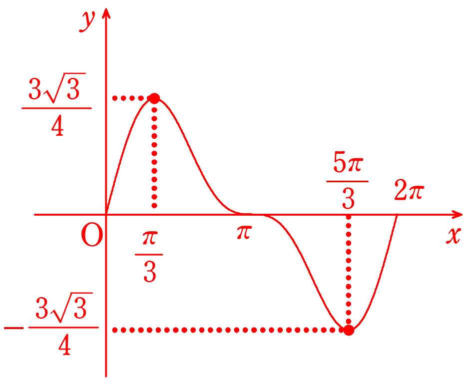
極大値　$f(1) = 1 \times e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

変曲点　$f(2) = 2 \times e^{-2} = \dfrac{2}{e^2}$

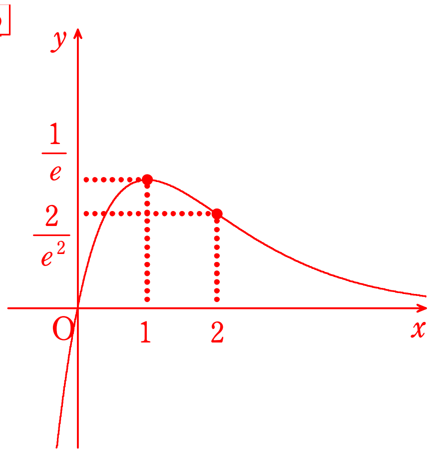
両端　$\displaystyle \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\displaystyle \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty$

1



2



問題３　次の関数の増減，凹凸を調べ，グラフの概形をかけ。
$y=x\log x-x$

真数条件より $x>0$
$f(x)=x\log x-x$　とおくと

$$f'(x)=1\times\log x+x\times\frac{1}{x}-1$$
$$=\log x$$

$f'(x)=0$　となるのは $\log x=0$
つまり $x=1$　のとき

$$f''(x)=(\log x)'$$
$$=\frac{1}{x}>0$$

[$f''(x)=0$ となる x は存在しない。]

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

極小値 $f(1)=-1$
両端

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x(\log x-1)=\infty$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(x\log x-x)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to0}(-x)=0$$

問題４　次の関数のグラフの概形をかけ。

$$y=\frac{\log x}{x}$$

真数条件より $x>0$

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\log x\times 1}{x^2}$$

$$=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ となるのは $\log x=0$　つまり $x=e$ のとき。

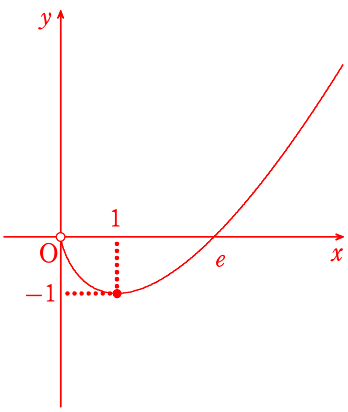
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

極大値 $f(e)=\dfrac{1}{e}$

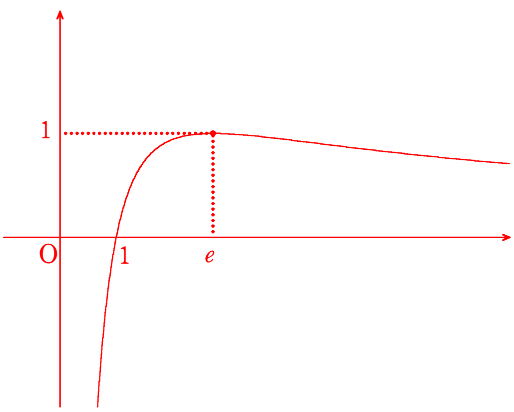
両端　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\times\log x=-\infty$$

3



4



$\boxed{\text{問題５}}$　次の曲線のグラフをかけ。

$$y^2 = x^2(x+3)$$

$y = \pm x\sqrt{x+3}$

ルート内：$x+3 \geq 0$　より，

$x \geq -3$

$f(x) = x\sqrt{x+3}$ とおくと，

求めるグラフは $y = f(x)$ と

$y = -f(x)$ を合わせたもので，

それらは x 軸対称

$f(x) = x(x+3)^{\frac{1}{2}}$ より，

$$f'(x) = 1 \times (x+3)^{\frac{1}{2}} + x \times \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = -2$ のとき

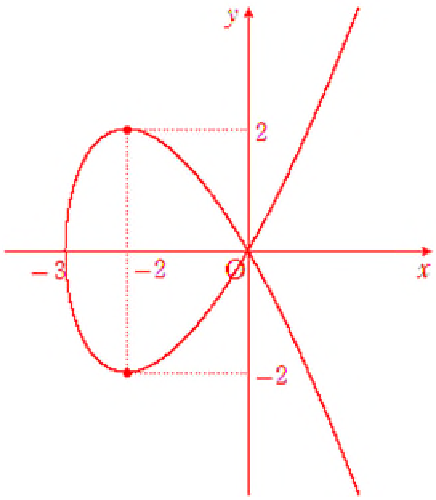
x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

極小値 $f(-2) = -2$

両端　$f(-3) = 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

［$f(0) = 0$ ］



$\boxed{\text{問題６}}$　次の関数のグラフをかけ。

$$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$$

ルート内：$1-x^2\geq 0$　より

$-1\leq x\leq 1$

$f(x)=x+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$　より

$$f'(x)=1+\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(-2x)$$

$$=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f'(x)=0$　となるのは，

$\sqrt{1-x^2}=x$

$1-x^2=x^2$　かつ$x\geq 0$

$x^2=\dfrac{1}{2}$　かつ$x\geq 0$

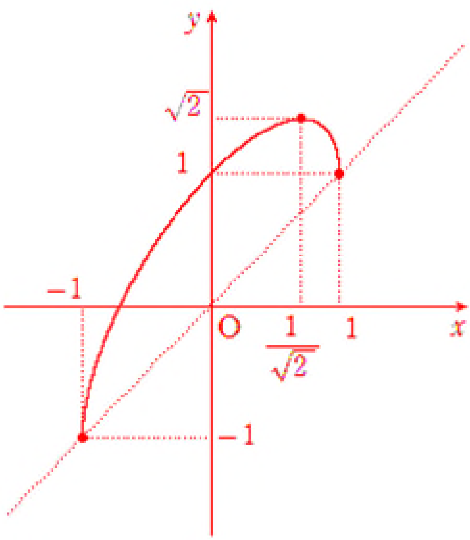
つまり$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき

x	-1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

極大値　$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$

両端　$f(-1)=-1,\ f(1)=1$

$[\,f(0)=1\,]$



$\boxed{問題７}$　次の関数のグラフをかけ。

$$y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$$

分母 $\neq 0$ より，$x\neq -2$

$$f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+2} \text{ とおく}$$

$$=x+1+\frac{1}{x+2}$$

$$=x+1+(x+2)^{-1}$$

$$f'(x)=1+(-1)(x+2)^{-1}$$

$$=1-\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{(x+2)^2-1}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$$

$f'(x)=0$ となるのは，

　$x=-3,\ -1$ のとき

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘	$\times$	↘		↗

極大値 $f(-3)=-3$

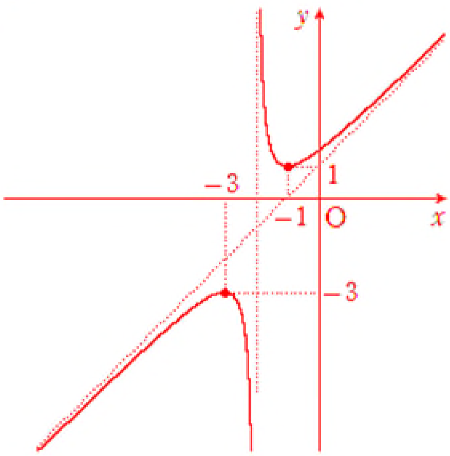
極小値 $f(-1)=1$

両端 $[\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty]$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x+2}=0$ より，$y=x+1$ が漸近線

また，$\lim_{x\to -2} f(x)=\pm\infty$ より，←分母ゼロ

　$x=-2$ が漸近線



問題８　次の関数の増減を調べグラフをかけ。

$$y=\frac{x}{(x-1)^2}$$

分母 ≠0 より，$x\neq 1$

$f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}=x(x-1)^{-2}$ とおくと，

$$f'(x)=1\times(x-1)^{-2}+x\times(-2)(x-1)^{-3}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2x}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{(x-1)-2x}{(x-1)^3}$$

$$=-\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

$f'(x)=0$ となるのは $x=-1$ のとき

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\times$	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\times$	$\searrow$

極小値 $f(-1)=-\dfrac{1}{4}$

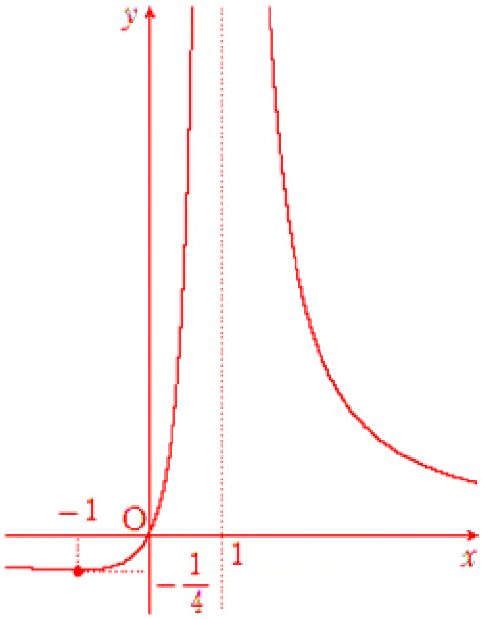
$f(0)=0$

両端 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ より

$y=0$ が漸近線

$\displaystyle\lim_{x\to 1\pm 0}f(x)=+\infty$ より

$x=1$ が漸近線



問題９　方程式 $\sin x = ae^x$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ に実数解を持つような a の範囲を求めよ。

$$\frac{\sin x}{e^x} = a$$

$$e^{-x}\sin x = a$$

$f(x) = e^{-x}\sin x$ とおくと，

方程式 $\sin x = ae^x$ の解は，

$y = f(x)$ と $y = a$ のグラフの共有点の x 座標に対応する。

$$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$$
$$= e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

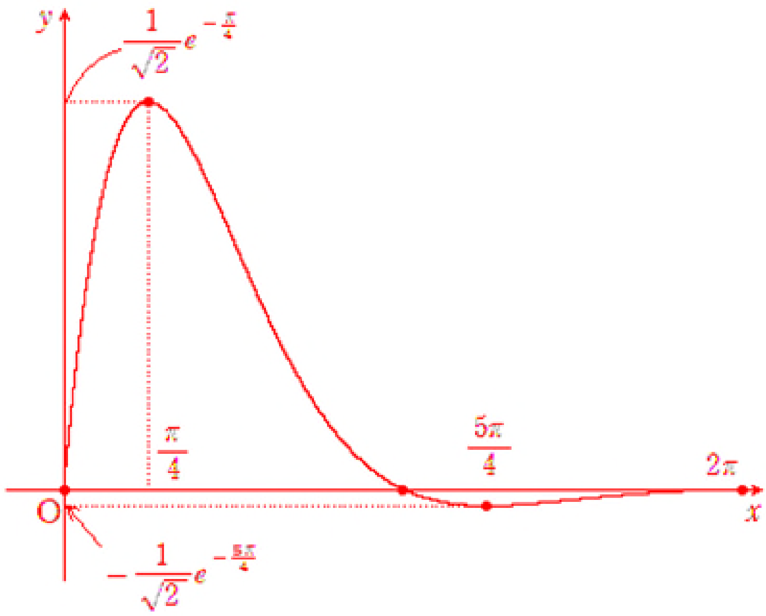
$f'(x) = 0$ となるのは，$\cos x = \sin x \iff \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$

つまり，$x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$ のとき。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

極値 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ， $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{-\frac{5\pi}{4}}\sin\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5\pi}{4}}$

よって，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5\pi}{4}} \leq a \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$



【例題 01】　$b \geq a > 0$ とする。不等式 $\log b - \log a \geq \dfrac{2(b-a)}{b+a}$ を証明せよ。

【方針】$x = \dfrac{b}{a}$ と置き換え

【例題 02】　$0 < a < b$ とする。不等式

$$-(a+1)e^{-a} < \frac{(b+2)e^{-b} - (a+2)e^{-a}}{b-a} < -(b+1)e^{-b}$$

を証明せよ。

【方針】平均値の定理

【例題 03】　a と b を正の数とする。このとき，$\sqrt{a^a b^b} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}}$ を証明せよ。

【方針】凸関数の利用

【例題 04】　a, b を正の数とする。不等式 $a\log(1+a) + e^b > 1 + ab + b$ を証明せよ。

【方針】一文字固定

YAWARAKA 先生のテキスト　③３　微分計算

標準問題

③3-標-1　次の関数を微分せよ。

（1）$y=2^x\sin x$　（2）$y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$　（3）$y=\tan^3 x$

（4）$y=\left(x^2+1\right)e^{-2x}$　（5）$y=\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$　6）$y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

【１】（1）$y'=\left(\sin x\cdot\log 2+\cos x\right)\cdot 2^x$　（2）$y'=-\dfrac{1}{1+\sin x}$

（3）$y'=3\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)=\dfrac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$

（4）$y'=2\left(-x^2+x-1\right)e^{-2x}$　（5）$y'=\dfrac{2}{\cos x}$

（6）$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

③3-標-2

（1）$y=x^{\log x}$ を微分せよ

（2）$x^2+xy+y^2=4$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x と y の式で表せ。

（3）$y=\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数の導関数を x の式で表せ。

【２】（1）$\dfrac{dy}{dx}=2x^{\log x-1}\cdot\log x$　（2）$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$　（3）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$

③3-標-3

$x=1-\cos\theta$，$y=\theta-\sin\theta$ のとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ で表せ。

【３】$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{\sin\theta\left(1+\cos\theta\right)}$

③$\boxed{\textbf{3-標-4}}$

曲線$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$の接線と$x$軸，$y$軸で囲まれた三角形の面積の最大値を求めよ。

【4】$\dfrac{1}{4}$　　　方針＝Asteroidのパラメータ表示

③$\boxed{\textbf{3-標-5}}$　次の関数のグラフをかけ

$$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x \qquad (0\leq x\leq \pi)$$

極小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(x=\dfrac{2}{3}\pi\right)$

極大値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{1}{2}\left(x=\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{1}{2}\left(x=\dfrac{3}{4}\pi\right)$

③$\boxed{\textbf{3-標-6}}$　次の関数の増減，凹凸を調べ，グラフをかけ。

$$y=xe^{-x}$$

[解答] $f(x)=xe^{-x}$ より

$f'(x)=(1-x)e^{-x}$,　$f''(x)=(x-2)e^{-x}$

よって，関数$f(x)$の増減表と凹凸表は次のようになる．

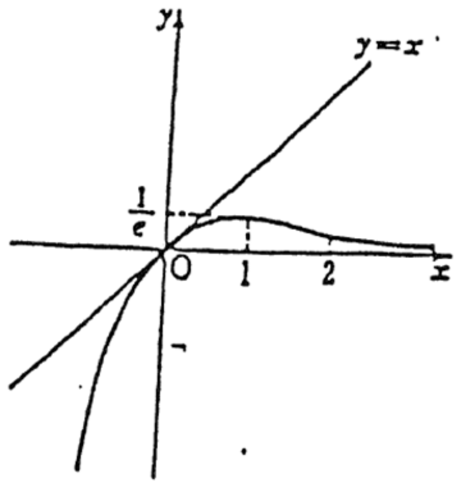
x	$-\infty$	…	1	…	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	極大	↘	0

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$

x	…	2	…
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	∩	変曲点	∪

変曲点 $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$



③$\boxed{\textbf{3-標-7}}$　$y=x(\log x)^2$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ。

答案　変域 $x>0$ において，$y=x(\log x)^2$ を微分して

$$y'=(\log x)^2+x\cdot 2\log x\cdot(\log x)'=(\log x+2)\log x$$

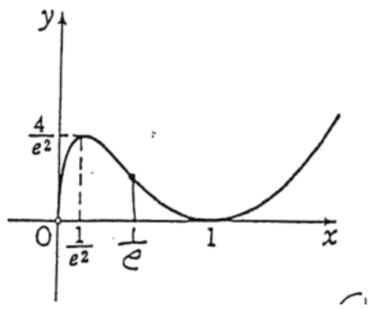
$y'=0$ とおくと，$\log x=-2,\ 0$　から　$x=e^{-2},\ 1$

なお，$x\longrightarrow +0$ のとき，$\log x=-t$ とおくと，$x=e^{-t},\ t\longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x\to+0}y=\lim_{t\to+\infty}(e^{-t})\cdot t^2=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2}{e^t}=0$$

であることを考えに入れて，y の値の変化を表にすると

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



したがって，y の極大値・極小値は

$x=\dfrac{1}{e^2}$ のとき　極大値 $\dfrac{4}{e^2}$，$x=1$ のとき

極小値 0 でグラフは右のようになる．

③$\boxed{\textbf{3-標-8}}$　次の関数の極値を求め，そのグラフの概形をかけ。

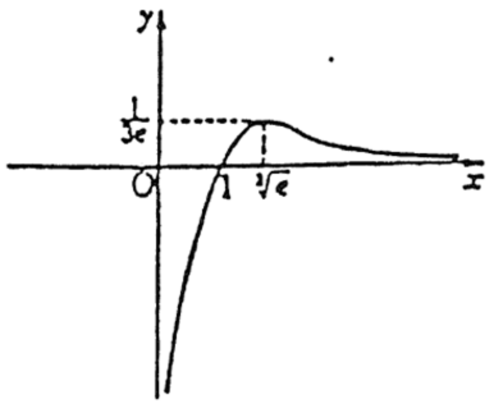
$$y=\frac{\log x}{x^3}$$

$$y'=\frac{1-3\log x}{x^4}\quad(x>0)$$

$y'=0$ のとき　$x=\sqrt[3]{e}$，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^3}=0$

y の増減の状態を調べると

$x=\sqrt[3]{e}$ で極大値 $\dfrac{1}{3e}$



③$\boxed{\textbf{3-標-9}}$　次の曲線の概形をかけ。

$y^2 = x^2(x+3)$

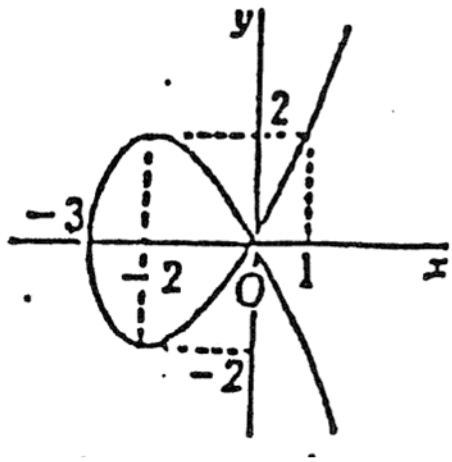
$y^2 = x^2(x+3)$

$x \geqq -3$, $y = \pm x\sqrt{x+3}$

$y = f(x) = x\sqrt{x+3}$

について

$$f'(x) = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$$



③$\boxed{\textbf{3-標-10}}$　次の曲線の概形をかけ。

$y^2 - 2x^2y + x^4 + x^2 - 2 = 0$

$\boxed{\text{解答}}$ (2)　$2 - x^2 \geqq 0$ より $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$

$y - x^2 = \pm\sqrt{2-x^2}$　　∴　$y = x^2 \pm \sqrt{2-x^2}$

$f(x) = x^2 + \sqrt{2-x^2}$,　$g(x) = x^2 - \sqrt{2-x^2}$　とおくと．

$$f'(x) = 2x - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{x(2\sqrt{2-x^2}-1)}{\sqrt{2-x^2}}$$

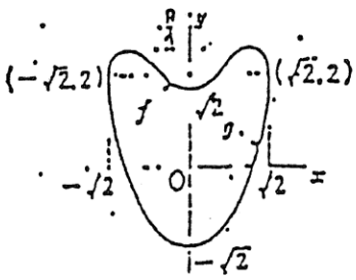
$$= \frac{x\{4(2-x^2)-1\}}{\sqrt{2-x^2}(2\sqrt{2-x^2}+1)} = \frac{-4x\left(x^2-\frac{7}{4}\right)}{\sqrt{2-x^2}(2\sqrt{2-x^2}+1)}$$

$$= \frac{-4x\left(x+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}{\sqrt{2-x^2}(2\sqrt{2-x^2}+1)}$$

また　　$g'(x) = x\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\right)$

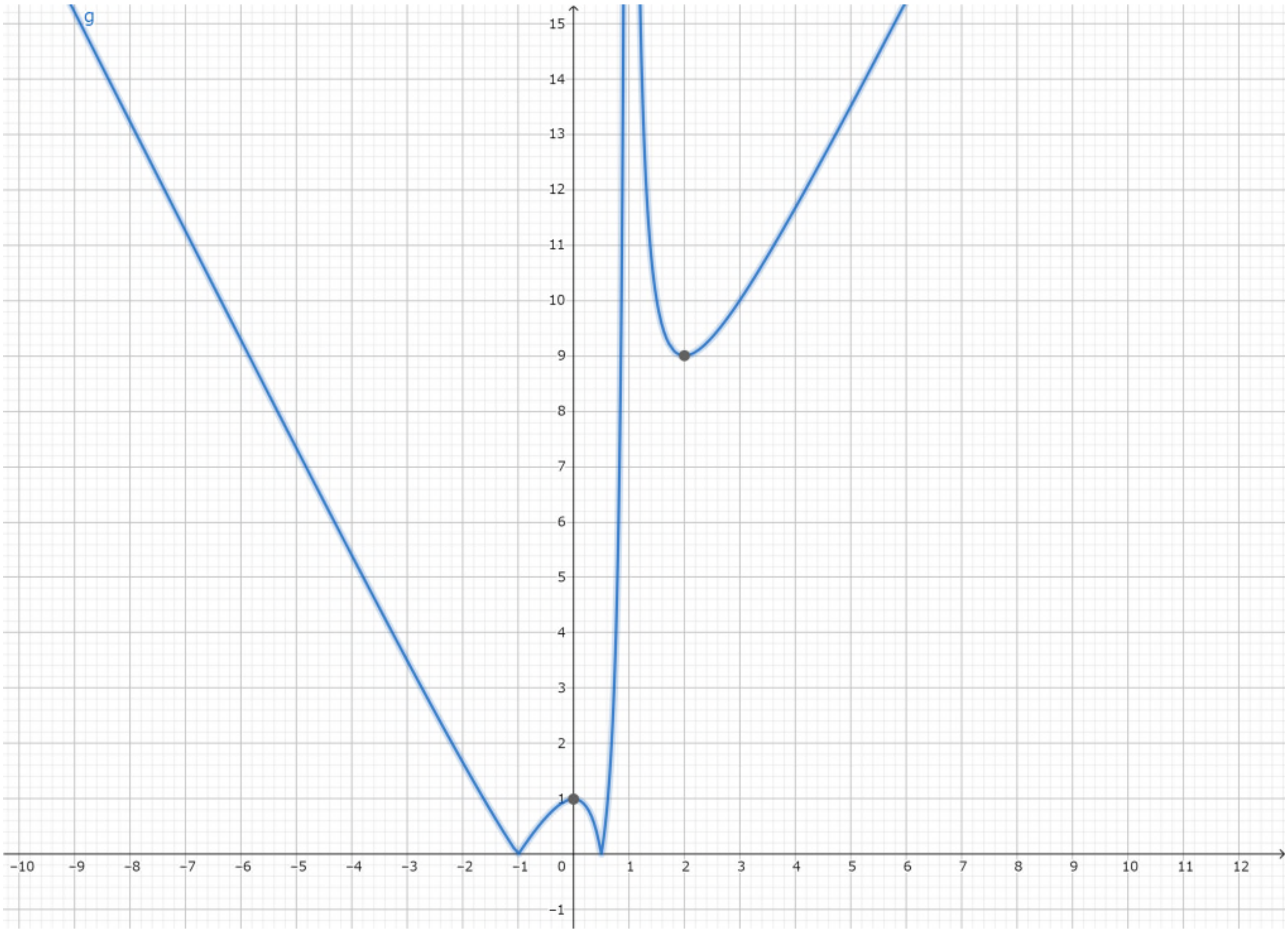
x	$-\sqrt{2}$	…	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	…	0	…	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	…	$\sqrt{2}$
f'	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
f	2	↗	$\frac{9}{4}$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$\frac{9}{4}$	↘	2

x	$-\sqrt{2}$	…	0	…	$\sqrt{2}$
g'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
g	2	↘	$-\sqrt{2}$	↗	2



C の概形は右のようになる．

③$\boxed{\textbf{3-標-11}}$　関数 $f(x)=\left|\dfrac{2x^2+x-1}{x-1}\right|$ について，極値を求め，グラフの概形をかけ。



発展問題

③**3-発-1**　$x>0$ の範囲で定義される関数 $f(x)=\left(\dfrac{e}{x}\right)^{\log x}$ について，$y=f(x)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ。

解答　(1)　$y=f(x)$ とおいて両辺対数をとると，

$$\log y=\log x(\log e-\log x)$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1-2\log x}{x}$$

$x>0$ より，$f(x)>0$ である．増減表は右のようになり，

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		↗		↘

$1-2\log x=0$，つまり $x=e^{\frac{1}{2}}$ のとき，極大値をとり，その値は

$$f(e^{\frac{1}{2}})=\left(\frac{e}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\log e^{\frac{1}{2}}}=e^{\frac{1}{4}}$$

(2)　$y''=\dfrac{2y(2\log x+1)(\log x-1)}{x^2}$

$(2\log x+1)(\log x-1)=0$ より

$$x=e^{-\frac{1}{2}},\ e$$

凹凸表は右の通り．

x	0	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$	e	$\cdots$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$
y		$\cup$		$\cap$		$\cup$

$f(e^{-\frac{1}{2}})=(e^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{3}{4}}$

$f(e)=1$

より，変曲点は $(e^{-\frac{1}{2}},\ e^{-\frac{3}{4}})$，$(e,\ 1)$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log f(x)=\lim_{x\to+0}\log x(1-\log x)$ であるが

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log x=-\infty$ だから

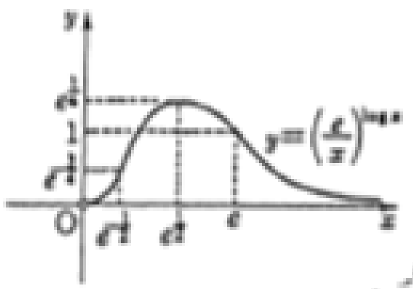
$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log f(x)=-\infty$　　∴　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=0$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty$ だから

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\log f(x)=-\infty$

∴　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

(1)，(2)，(3)により，グラフの概形は右のとおり．



③$\boxed{\textbf{3-発-2}}$　$y=\sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x-4}}$ のグラフを描け。

【解答】略

③3-発-3　曲線 $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$ について，(1)　漸近線の方程式，(2)　y の増減，(3)曲線の凹凸　を調べ，その概形をかけ。

解答 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{2}{3}}=1$

だから，漸近線があれば，その傾きは1である．その切片を b とすれば

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\{(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}-x\}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\left(\frac{1}{t}+1\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{t}-2\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{t}\right\}=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{3}}(1-2t)^{\frac{2}{3}}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{1}{3}(1+t)^{-\frac{2}{3}}(1-2t)^{\frac{2}{3}}-\frac{4}{3}(1+t)^{\frac{1}{3}}(1-2t)^{-\frac{1}{3}}\right\}=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=-1$$

よって，漸近線の方程式は　$y=x-1$

(2)　$y'=\dfrac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$

$$=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}\{x-2+2(x+1)\}=x(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$$

したがって，y の増減は，次の表のようになる．

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$+\infty$
y'		$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt[3]{4}$ 極大	↘	0 極小	↗	$+\infty$

(3)　$y''=(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}-\dfrac{2}{3}x(x+1)^{-\frac{5}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{3}x(x+1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}$

$$=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{5}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}\{3(x+1)(x-2)-2x(x-2)-x(x+1)\}$$

$$=-2(x+1)^{-\frac{5}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}$$

したがって，$x<-1$ のとき $y''>0$，$x>-1$ のとき $y''<0$ だから

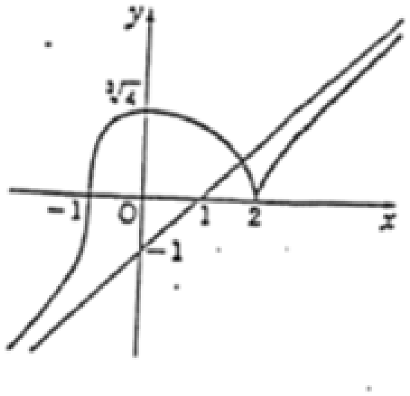
曲線は　$x<-1$ のとき下に凸

$x>-1$ のとき上に凸

（$x=-1$ の点は変曲点）

以上調べたことから，曲線の概形は，右の図のようになる．

（$x=-1$，$x=2$ における曲線の接線は，x 軸に垂直になっている）



③$\boxed{\textbf{3-発-4}}$　xy 平面上の曲線 $y=\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)$ と，原点を中心とする半径 r の円との共有点の個数 $N(r)$ を求めよ。

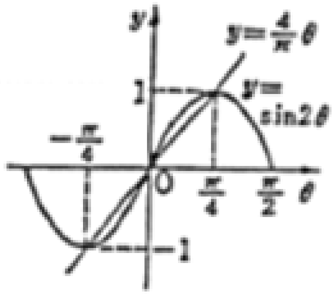
3 [illegible]（微分法の方程式への応用）

解答　$x^2+y^2=r^2$　$\therefore$　$x^2+\cos^2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)^2=r^2$

$$\therefore\quad \frac{2}{\pi}\theta^2+\cos^2\theta=r^2\qquad\left(\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2}}x\right)$$

の解を考える。$f(\theta)=\frac{2}{\pi}\theta^2+\cos^2\theta$ とおくと

$$f'(\theta)=\frac{4}{\pi}\theta-2\cos\theta\sin\theta$$
$$=\frac{4}{\pi}\theta-\sin 2\theta$$



右図で，$y=\sin 2\theta$ のグラフの凹凸を考え，上下関係をしらべることにより，$f'(\theta)$ の符号の変化は右の表のようになる。$f(\theta)$ は偶関数である。

θ		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$	
$f'(\theta)$	−	0	＋	0	−	0	＋
$f(\theta)$	↘		↗		↘		↗

$f(0)=1$

$$f\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2},\quad \lim_{\theta\to\pm\infty}f(\theta)=+\infty$$

曲線 $y=f(\theta)$ と直線 $y=r^2$ の交点の個数をしらべ，

（答）
$a=\sqrt{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}}$ として，$N(r)$ は，
$0<r<a$ のとき 0，
$r=a$ のとき 2，$a<r<1$ のとき 4，
$r=1$ のとき 3，$r>1$ のとき 2

③**3-発-5**　パラメータ表示 $\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}$ $(-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ で与えられる曲線(サイクロイド)をC，中心$(a,1)$，半径１の円をBとする。$0<a<\pi$ のとき，C とBの共有点はいくつ存在するか。

〔230〕 (1) 円の方程式 $(x-\alpha)^2+(y-1)^2=1$ に，C上の点の座標 $(x,\ y)=(\theta-\sin\theta,\ 1-\cos\theta)$ を代入する：

$$(\theta-\sin\theta-\alpha)^2+\cos^2\theta=1$$

$$\therefore\ (\theta-\alpha)(\theta-2\sin\theta-\alpha)=0 \quad \cdots\cdots①$$

$-\pi<\theta<\pi$ における①の解 θ が，CとBの共有点を与える。

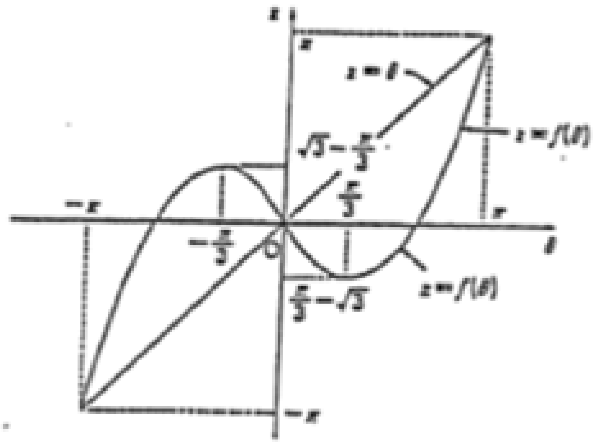
そこで $f(\theta)=\theta-2\sin\theta$ とおくと；

$$f'(\theta)=1-2\cos\theta$$

であるから，$f(\theta)$ の増減表は

θ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	$-\pi$	↗	$-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	π

となり，$z=f(\theta)$ のグラフは次のようになる。



①の解は，上の曲線 $z=f(\theta)$ および $z=\theta$ が直線 $z=\alpha$ と共有する点の θ 座標であるから，①の解の数は次のとおり。

α	0		$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$		π
θの数	／	4	3	2	／

③$\boxed{3\text{-発-}6}$　座標平面上に，媒介変数θ で表された曲線$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ がある。

この曲線上の異なる２点 P，Q での接線が互いに直交するとき，PQ の中点の軌跡を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\frac{\theta}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

$$P(\theta - \sin\theta,\ 1-\cos\theta),$$
$$Q(\varphi - \sin\varphi,\ 1-\cos\varphi)$$

でのそれぞれの接線が直交すれば，①より

$$0 < \theta \leqq \pi,\ \pi \leqq \varphi < 2\pi$$

としてよい。

$$\cot\frac{\theta}{2} \cdot \cot\frac{\varphi}{2} = -1$$

$$\therefore\ -\cot\frac{\theta}{2} = \tan\frac{\varphi}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\frac{\varphi}{2} \qquad \therefore\ \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\varphi}{2}$$

$$\therefore\ \varphi = \theta + \pi$$

$$\therefore\ Q(\theta + \pi + \sin\theta,\ 1 + \cos\theta)$$

$\theta = 0$ や $\varphi = 2\pi$ でも成立。

よって，PQ の中点を M$(x,\ y)$ とすると

$$x = \theta + \frac{\pi}{2},\quad y = 1$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，求める軌跡は

$$\text{線分 } y = 1\ \left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$$

③**3-発-7**　曲線 $y=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(x,y\right)$ における接線 PT と，法線 PN とが x 軸と交わる点をそれぞれ T，N とする。ただし，$x>0$ とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　△PTN の面積は，$\dfrac{y^4}{2y'}$ に等しいことを示せ。

(2)　点 $\mathrm{P}\left(x,y\right)$ が曲線上を動くとき，△PTN の面積が最小となる点 P の座標と最小値を求めよ。

(1)　点 $\mathrm{P}(x, y)$ における接線, 法線は それぞれ

$$Y-y=y'(X-x)$$

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

$Y=0$ とおくと，それぞれ

$$\therefore\quad X=x-\frac{y}{y'},\quad X=x+yy'$$

$$\therefore\quad \begin{cases}\mathrm{T}\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)\\ \mathrm{N}\ (x+yy',0)\end{cases}$$

$$\mathrm{TN}=(x+yy')-\left(x-\frac{y}{y'}\right)=\frac{y}{y'}(y'^2+1)$$

$y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ から

$$y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

$$\therefore\quad y'^2+1=\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2+1$$

$$=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2=y^2$$

よって　$\mathrm{TN}=\dfrac{y^3}{y'}$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{PTN}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{TN}\cdot y=\frac{y^4}{2y'}$$

(2)　$f(x)=\dfrac{y^4}{2y'}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{4y^3\cdot y'\cdot y'-y^4\cdot y''}{2y'^2}$$

$$=\frac{y^3(4y'^2-yy'')}{2y'^2}$$

$y'^2+1=y^2$ より

$y'^2=y^2-1$　また，$y''=y$

であるから

$$f'(x)=\frac{y^3\{4(y^2-1)-y^2\}}{2(y^2-1)}=\frac{y^3(3y^2-4)}{2(y^2-1)}$$

$x>0$ から $y>1$

よって，$f'(x)=0$ から

$$y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

y	1		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	
S'		$-$	0	$+$
S		↘	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	↗

増減表から $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき $f(x)$ は最小になる。

また，このとき

$$y'^2=y^2-1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$$

$y'>0$ より

$$y'=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(x)=\frac{y^4}{2y'}=\frac{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^4}{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$y+y'=e^x$ から

$$e^x=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\log 3$$

よって，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\log 3,\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ のとき，面積は最小となり，最小値 $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

〔急所〕　$y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ のとき，

$y''=y,\quad y'^2+1=y^2,\quad y+y'=e^x$

③$\boxed{\textbf{3-}\text{発}\textbf{-8}}$　関数 $y=\dfrac{bx+1}{x^2+ax}\left(a>0,\ b>0\right)$ が 2 つの極値 $-1,\ -4$ をとるように a, b の値を求めよ。

［解］　$y'=\dfrac{(x^2+ax)\cdot b-(2x+a)(bx+1)}{(x^2+ax)^2}$ ……①

$=\dfrac{-(bx^2+2x+a)}{(x^2+ax)^2}$ ……②

極値をとるとき，①$=0$ より $b(x^2+ax)=(2x+a)(bx+1)$

$\therefore\ \dfrac{bx+1}{x^2+ax}=\dfrac{b}{2x+a}$

②$=0$ より $2x+a=-bx^2$　　$\therefore\ \dfrac{bx+1}{x^2+ax}=\dfrac{b}{-bx^2}=-\dfrac{1}{x^2}$

$a>0,\ b>0$ より $bx^2+2x+a=0$ の解は明らかに負で，

極値が -1 のとき，$-\dfrac{1}{x^2}=-1$　　$\therefore\ x^2=1$　　$\therefore\ x=-1$

極値が -4 のとき，$-\dfrac{1}{x^2}=-4$　　$\therefore\ x^2=\dfrac{1}{4}$　　$\therefore\ x=-\dfrac{1}{2}$

よって $bx^2+2x+a=0$ の解は -1 と $-\dfrac{1}{2}$ で，解と係数の関係より

$-1-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{2}{b}$，$(-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{b}$　　$\therefore\ b=\dfrac{4}{3}$，$a=\dfrac{2}{3}$ ……(答)

$y=\dfrac{4x+3}{3x^2+2x}$，$y'=\dfrac{-6(2x+1)(x+1)}{(3x^2+2x)^2}$　より，y の増減は下のようになる。

x	…	-1	…	$-\frac{2}{3}$	…	$-\frac{1}{2}$	…	0	…
y'	$-$	0	$+$	×	$+$	0	$-$	×	$-$
y	↘	-1	↗	×	↗	-4	↘	×	↘

③$\boxed{\text{3-発-9}}$　曲線$y=\dfrac{a-x}{x^2+1}$が相異なる３つの変曲点をもつとき，３つの変曲点は同一の直線上にあることを示せ。

(1)　変曲点は y'' の符号の変化で与えられるから，異なる３つの変曲点をもつとき，$y''=0$ は異なる３つの実数解をもつ。よって

$$y'=\frac{x^2-2ax-1}{(x^2+1)^2}$$

$$y''=\frac{-2(x^3-3ax^2-3x+a)}{(x^2+1)^3}$$

より，変曲点の x 座標は

$$x^3-3ax^2-3x+a=0 \quad \cdots\cdots①$$

の実数解である。

逆に，①が異なる３つの実数解をもてば，その x の各値の前後で y'' の符号が変わるから，その x の値は曲線の変曲点を与える。

ところで，

曲線 $y=\dfrac{a-x}{x^2+1}$ と直線 $y=mx+n$ の交点の x 座標は　$\dfrac{a-x}{x^2+1}=mx+n$

$\Leftrightarrow mx^3+nx^2+(m+1)x+n-a=0\cdots②$

の３つの解であるから，①，②が共通の３実数解をもてば，３つの変曲点は同一の直線 $y=mx+n$ 上にあることになる。(1)，(2)の一致条件は

$$\frac{m}{1}=\frac{n}{-3a}=\frac{m+1}{-3}=\frac{n-a}{a}$$

これから

$$m=-\frac{1}{4},\ n=\frac{3}{4}a$$

よって，３つの変曲点は直線

$$x+4y-3a=0$$

の上にある。

③$\boxed{\textbf{3-発-10}}$　$0 \leq x \leq 1$で，不等式$1-kx \leq \dfrac{2}{1+e^x} \leq 1-lx$が，つねに成り立つような$k$の最小値および$l$の最大値を求めよ。

$1-kx \leqq \dfrac{2}{1+e^x} \leqq 1-lx$　より　$kx \geqq 1-\dfrac{2}{1+e^x} \geqq lx$

$x=0$ ではつねに成り立つから，$x>0$ のとき $k \geqq \dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{2}{e^x+1}\right) \geqq l$　……①

よって，$g(x)=\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{2}{e^x+1}\right)$　$\left(=\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\dfrac{1}{e^x+1}\right)$ とおくと，

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2}{e^x+1}\right)+\frac{1}{x}\cdot\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{1+2xe^x-e^{2x}}{x^2(e^x+1)^2}$$

ここで，分子を $h(x)$ とおくと，$h(x)=1+2xe^x-e^{2x}$ より，

$h'(x)=2e^x(1+x-e^x)$ となるが，$x>0$ では $1+x<e^x$ だから，

$h'(x)<0$ しかも $h(0)=0$ だから $x>0$ で $h(x)<0$ となる。

よって $g'(x)<0$ $(0<x\leqq 1)$ だから，$g(x)$ は減少関数である。

ゆえに，$g(x)$ の最小値は $g(1)=\dfrac{e-1}{e+1}$ で，また，

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}\quad\left(\Leftarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\right)$$

だから，$0<x\leqq 1$ で $\dfrac{1}{2}>g(x)\geqq\dfrac{e-1}{e+1}$ が成り立つ。

よって，つねに①が成り立つには $k\geqq\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{e-1}{e+1}\geqq l$ が成り立つことである。

したがって，k の最小値は $\dfrac{1}{2}$，l の最大値は $\dfrac{e-1}{e+1}$　……(答)

SoyPaste 数学Ⅲの微分法

SP③3-1 (r4-2)　○

関数 $f(x)=2^x-x\log 2$ について，次の問に答えよ.

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ.

(2)　曲線 $y=f(x)$ の $x=1$ における接線の方程式を求めよ.

(1)　$f(x)=2^x-x\log 2$ より，

$$f'(x)=2^x\log 2-\log 2$$
$$=(2^x-1)\log 2$$

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

したがって，$f(x)$ は，

$x=0$ のとき，　極小値 1

をとる.

(2)　(1) より，

$$f'(1)=\log 2$$

であり，

$$f(1)=2-\log 2$$

であるから，求める接線の方程式は，

$$y=(x-1)\log 2+2-\log 2$$
$$=x\log 2+2-2\log 2.$$

<参考>

$y=2^x$ とし，両辺の自然対数をとると，

$$\log_e y=x\log_e 2$$

であるから，両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\log 2.$$

これより，

$$\frac{dy}{dx}=y\log 2$$
$$=2^x\log 2.$$

<参考終り>

SP③3-2 (r33-2)　○

$f(x) = x\log|x-1|$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ を求めよ．

(2) $x > 1$ において，導関数 $f'(x)$ の極値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べてグラフをかけ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1} |x-1| = +0$ であるから，

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty.$$

(2) $x > 1$ において，$f(x) = x\log(x-1)$ であるから，

$$f'(x) = \log(x-1) + \frac{x}{x-1},$$
$$f''(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

これより，$x > 1$ における $f'(x)$ の増減は次のようになる．

x	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$

したがって，$f'(x)$ は，

$x = 2$ のとき，　極小値 2

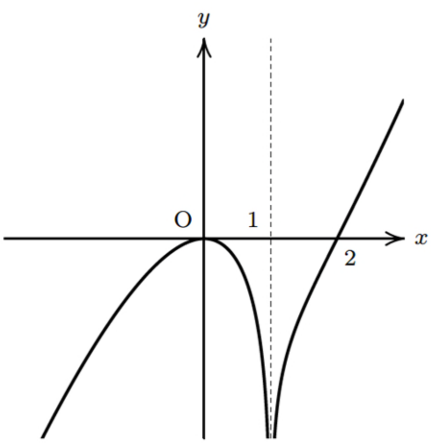
をとる．

(3) $x < 1$ のとき，$f(x) = x\log(1-x)$ であるから，

$$f'(x) = \log(1-x) + \frac{x}{x-1},$$
$$f''(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

以上より，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$



また，

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = \infty.$$

さらに，$f(x)$ は，

$x = 0$ のとき，　極大値 0

をとる．

SP③3-3 (j4-3)　○

曲線 $y = xe^{-x}$ の接線で点 $(1,\ a)$ を通るものがちょうど2本存在するような a の値をすべて求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$ を用いてもよい．

$y = xe^{-x}$ より，

$$y' = (1-x)e^{-x}$$

であるから，点 $(t,\ te^{-t})$ における接線の方程式は，

$$y = (1-t)e^{-t}(x-t) + te^{-t}.$$

これが点 $(1,\ a)$ を通る条件は，

$$a = (1-t)^2e^{-t} + te^{-t},$$

すなわち，

$$a = (1-t+t^2)e^{-t}$$

を満たす実数 t が存在することである．

ここで，

$$f(t) = (1-t+t^2)e^{-t}$$

とすると，

$$f'(t) = -(t-1)(t-2)e^{-t}$$

であるから，$f(t)$ の増減は次のようになる．

t	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$\frac{3}{e^2}$	$\searrow$

また，

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0.$$

以上より，求める a の値は，

$$a = \frac{1}{e},\ \ \frac{3}{e^2}.$$

SP③3-4 (j9-4)　○

区間 $x>0$ における関数 $f(x)=e^{-x}\cos x$ の極大値を，大きい方から順に，

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \cdots,\quad a_n,\quad \cdots$$

とするとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ．

$f(x)$ の定め方より，自然数 n に対して，

$$f(x+2n\pi)=e^{-2n\pi}f(x)$$

であるから，$0<x\leqq 2\pi$ における $f(x)$ の極大値を調べればよい．

$$\begin{aligned} f'(x)&=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x\\ &=\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\frac{5}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

であるから，$0<x\leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は，

$$初項\, a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{7}{4}\pi},\qquad 公比\, e^{-2\pi}$$

の無限等比級数であるから，収束してその和は，

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{7}{4}\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}.$$

SP③3-5 (j41-3)

2 次の多項式 $P(x)=ax^2+bx+c$ が，条件

$$\{xP(\log x)\}'=(\log x)^2 \quad (x>0)$$

を満たすような，定数 a，b，c の値を求めよ．

$P(x)=ax^2+bx+c$ より，$P'(x)=2ax+b$ であり，

$$\begin{aligned}\{xP(\log x)\}'&=P(\log x)+xP'(\log x)\cdot\frac{1}{x}\\&=P(\log x)+P'(\log x)\end{aligned}$$

であるから，

$$\{xP(\log x)\}'=a(\log x)^2+(2a+b)\log x+b+c.$$

条件より，

$$\begin{cases}a=1,\\2a+b=0,\\b+c=0\end{cases}$$

であるから，

$$a=1,\quad b=-2,\quad c=2.$$

SP③3-6 (j23-1) ※関数範囲入れ忘れ

関数 $y = \dfrac{2^{3x} + 4^{x+1} + 2^{x+2}}{2^x + 2}$ の逆関数を求めよ.

関数の定め方より,

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2^x(2^{2x} + 4 \cdot 2^x + 4)}{2^x + 2} \\
&= \frac{2^x(2^x + 2)^2}{2^x + 2} \\
&= 2^x(2^x + 2) \\
&= (2^x + 1)^2 - 1
\end{aligned}
$$

であるから,

$$y + 1 = (2^x + 1)^2.$$

$y > 0$ のもとで,

$$\sqrt{y + 1} = 2^x + 1$$

であるから,

$$x = \log_2(\sqrt{y + 1} - 1).$$

x と y を入れ換えると，求める逆関数は,

$$y = \log_2(\sqrt{x + 1} - 1) \qquad (x > 0).$$

SP③3-7 (s33-2)　○

a を正の定数とする．不等式 $a^x \geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ．

$a^x \geqq x$ の両辺の対数をとると，

$$\log a^x \geqq \log x$$

であるから，$x > 0$ より，

$$\frac{\log x}{x} \leqq \log a.$$

ここで，

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

とすると，任意の正の実数 x に対して $a^x \geqq x$ が成り立つのは，

$$(f(x)\text{ の最大値}) \leqq \log a$$

が成り立つときである．

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

であるから，$x > 0$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

したがって，

$$\frac{1}{e} \leqq \log a$$

であるから，求める a の値の範囲は，

$$a \geqq e^{\frac{1}{e}}.$$

SP③3-8(j38-5)　○

四角形 ABCD は半径 1 の円 O に内接し，AB = AD，CB = CD を満たしている．

(1) 線分 AC は円 O の直径であることを示せ．

　辺 CB，CD の中点をそれぞれ M，N とする．四角形 ABCD を線分 AM，AN，MN に沿って折り曲げて点 B，C，D を重ね，四面体 AMNC を作る．CM $= x$ $(0 < x < 1)$ とする．

(2) 四面体 AMNC の体積 V を x を用いて表せ．

(3) 四面体 AMNC に内接する球の表面積 S を x を用いて表し，$0 < x < 1$ における S の最大値を求めよ．

(1) 四角形 ABCD は円 O に内接するから，

$$\angle\mathrm{ABC} + \angle\mathrm{ADC} = \pi. \qquad \cdots ①$$

また，三角形 ABC，ADC において，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AD},\quad \mathrm{CB} = \mathrm{CD},\quad \mathrm{AC}\text{ は共通}$$

であるから，

$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{ADC}.$$

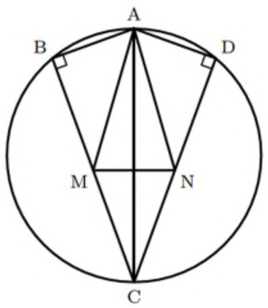
よって，

$$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ADC}. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ADC} = \frac{\pi}{2} \qquad \cdots ③$$

であるから，線分 AC は O の直径である．

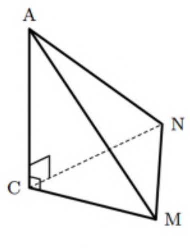


(2) 四面体 AMNC において，③より，

$$\angle\mathrm{ACM} = \angle\mathrm{ACN} = \frac{\pi}{2}$$

であるから，

$$\mathrm{AC} \perp (\text{平面 CMN}).$$



また，(1) より，AC = 2 であるから，BM = CM = x より，三角形 ABM に三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{AB} = 2\sqrt{1-x^2}.$$

また，四角形 ABCD において，線分 MN の中点を L とすると，

$$\triangle\mathrm{CLM} \backsim \triangle\mathrm{CBA}$$

であり，相似比は，

$$\mathrm{CM} : \mathrm{CA} = x : 2.$$

したがって，

$$\triangle\mathrm{CLM} = \frac{x^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}x^3\sqrt{1-x^2}.$$

さらに，

$$\triangle\mathrm{CMN} = 2\triangle\mathrm{CLM}$$

であるから，

$$V = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\cdot x^3\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{3}x^3(1-x^2).$$

(3) 四面体 AMNC の内接球の半径を r，表面積を T とすると，

$$S = 4\pi r^2, \qquad \cdots ④$$

$$V = \frac{1}{3}T\cdot r. \qquad \cdots ⑤$$

また，$T =$ (四角形 ABCD の面積) であるから，

$$T = 2\sqrt{1-x^2}\cdot 2x = 4x\sqrt{1-x^2}. \qquad \cdots ⑥$$

⑤，⑥と (2) の結果より，

$$\frac{2}{3}x^3(1-x^2) = \frac{4}{3}x\sqrt{1-x^2}\cdot r$$

であるから，

$$r = \frac{1}{2}x^2\sqrt{1-x^2}.$$

④より，

$$S = \pi x^4(1-x^2)$$

であるから，

$$S' = 2\pi x^3(2-3x^2).$$

これより，$0 < x < 1$ における S の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	(1)
S'		+	0	−	
S		↗	$\frac{4}{27}\pi$	↘	

したがって，S は $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき，最大となり，S の最大値は，

$$\frac{4}{27}\pi.$$

コメント

この問題をもっとシンプルな形にすると，次のようになります．

問題

一辺の長さが a の正方形 ABCD の辺 BC，CD の中点をそれぞれ M，N とし，正方形 ABCD を線分 AM，AN，MN に沿って折り曲げて点 B，C，D を重ね，四面体 AMNC を作る．

このとき，四面体 AMNC に内接する球の半径を求めよ．

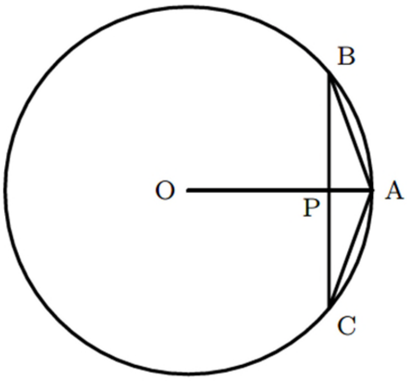
SP③3-9 (s21-3)　◎

点 O を中心とする半径 1 の円周上に AB = AC を満たす異なる 3 点 A，B，C がある．A と O を通る直線が線分 BC と交わる点を P とする．

(1) P は線分 BC の中点であることを示せ．

(2) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とするとき，三角形 ABC の面積 $S(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi - 0} \frac{S(\theta)}{(\pi - \theta)^3}$ を求めよ．



(1) OB = OC，AB = AC であるから，直線 OA は線分 BC の垂直二等分線である．

したがって，直線 OA と線分 BC の交点 P は線分 BC の中点である．

(2) 三角形 ABC に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin \frac{\pi - \theta}{2}} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin \frac{\pi - \theta}{2}} = 2$$

であるから，

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 2\cos\frac{\theta}{2}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \sin\theta \\ &= 2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta. \end{aligned}$$

(3) $\pi - \theta = t$ とすると，$\theta \to \pi - 0$ のとき，

$$t \to +0$$

であり，

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sin(\pi - t) \\ &= \sin t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2\frac{\theta}{2} &= \cos^2\frac{\pi - t}{2} \\ &= \sin^2\frac{t}{2} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \to \pi - 0} \frac{S(\theta)}{(\pi - \theta)^3} &= \lim_{t \to +0} \frac{2\sin^2\frac{t}{2}\sin t}{t^3} \\ &= \lim_{t \to +0} 2\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin t}{t} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

SP③3-10 (s39-3)　○

t を定数として，xy 平面上の直線 C_t : $y=(x+t)e^t$ を考える．t が $t>0$ の範囲を変化するとき，C_t が通る範囲を求め，その概形を図示せよ．

1996 慶応義塾大学

$f(t)=(t+x)e^t$ とすると，

$$f'(t)=(t+x+1)e^t$$

であるから，値 $t=-x-1$ と区間 $t>0$ との大小関係で場合分けをする．

(i)　$-x-1 \leqq 0$，すなわち，$x \geqq -1$ のとき，

$$f'(t) \geqq 0$$

なので，

$$f(t)>f(0).$$

したがって，

$$y>x.$$

(ii)　$-x-1>0$，すなわち，$x<-1$ のとき，

$t>0$ における $f(t)$ の増減は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$-x-1$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗

これより，

$$f(t) \geqq f(-x-1)$$

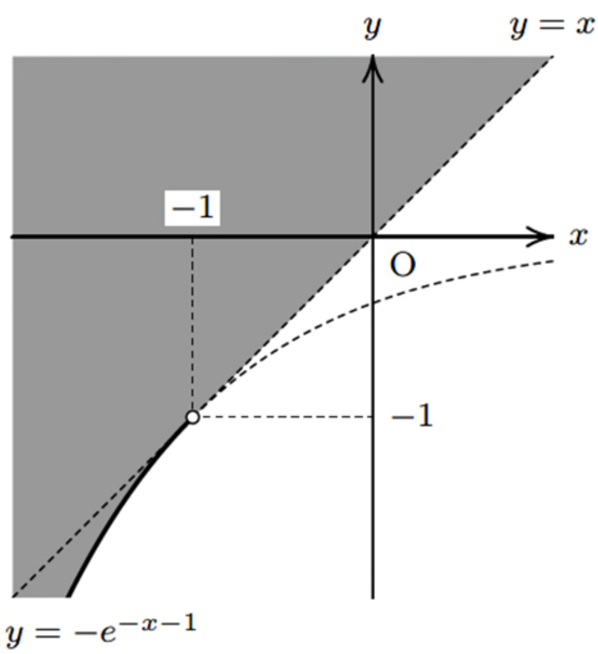
であるから，

$$y \geqq -e^{-x-1}.$$

(i)，(ii) より，C_t が通過する範囲は次のようになる．

$$\begin{cases} x \geqq -1 \text{ のとき，} & y>x, \\ x<-1 \text{ のとき，} & y \geqq -e^{-x-1}. \end{cases}$$

これを図示すると，次の図の網目部分である．ただし，曲線 $y=-e^{-x-1}$ $(x<-1)$ 上の点は含む．



SP③3-11 (s1-3)　○

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい．

(1) 自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど2つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1)の2つの実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\quad ne<\beta_n$$

が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ．

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とすると，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

であるから，$x>0$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

ここで，$e<3$，$n\geqq 1$ であるから，

$$f(e)=\frac{1}{e}>\frac{1}{3n}.$$

さらに，

$$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0. \qquad\cdots ①$$

したがって，曲線 $y=f(x)$ は直線 $y=\dfrac{1}{3n}$ の $x>0$ の部分と異なる2点で交わるので，示せた．

(2) (1)の $f(x)$ に対して，$e<3$，$n\geqq 1$ であるから，

$$f(1)-\frac{1}{3n}=-\frac{1}{3n}<0, \qquad\cdots ②$$

$$f(e^{\frac{1}{n}})-\frac{1}{3n}=\frac{3-e^{\frac{1}{n}}}{3ne^{\frac{1}{n}}}>0, \qquad\cdots ③$$

$$\begin{aligned}f(ne)-\frac{1}{3n}&=\frac{\log n+1}{ne}-\frac{1}{3n}\\&>\frac{\log n+1}{3n}-\frac{1}{3n}\\&=\frac{\log n}{3n}\geqq 0. \qquad\cdots ④\end{aligned}$$

②，③，④より，

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\quad ne<\beta_n$$

が成り立つ．

また，$n\to\infty$ のとき，$e^{\frac{1}{n}}\to 1$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1.$$

SP③4-12 (s41-3)

次の問に答えよ．

(1) $x \geqq 0$ のとき不等式 $1-x \leqq e^{-x}$ を示せ．

(2) n 人 $(n \geqq 3)$ の選手の中からくじ引きで 2 人の選手を選び，1 回の試合を行う．

このようにして試合を n 回行うとき，同じ選手同士の試合が一度も起こらない確率は $\dfrac{1}{e}$ より小さいことを証明せよ．ただし，e は自然対数の底である．

2005 名古屋市立大学

(1) $f(x)=e^{-x}-(1-x)$ とすると，$x \geqq 0$ において，

$$f'(x)=1-e^{-x} \geqq 0$$

であるから，$f(x)$ は単調に増加する．

さらに，$f(0)=0$ であるから，$x \geqq 0$ において $f(x) \geqq 0$.

(2) n 人の選手から 2 人の選手を選ぶ方法は，

$${}_n\mathrm{C}_2 \text{ 通り．}$$

次回の試合で同じ選手同士が試合をしない確率は，

$$1-\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_2}.$$

さらに，3 回目の試合まで同じ選手が試合をしない確率は，

$$\left(1-\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)\left(1-\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_2}\right).$$

同様にすると，n 回の試合で同じ選手同士が試合をしない確率 p_n は，

$$p_n=\left(1-\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)\left(1-\frac{2}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{{}_n\mathrm{C}_2}\right).$$

ここで，(1) より，$x>0$ のとき，

$$1-x<e^{-x}$$

が成り立つから，$1 \leqq k \leqq n-1$ に対して，

$$0<1-\frac{k}{{}_n\mathrm{C}_2}<e^{-\frac{k}{{}_n\mathrm{C}_2}}.$$

したがって，

$$p_n<e^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k}{{}_n\mathrm{C}_2}}.$$

さらに，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{{}_n\mathrm{C}_2}=1$$

であるから，

$$p_n<\frac{1}{e}.$$