場合の数（個数の処理）

その道具　$n!$，${}_n\mathrm{C}_k$

①$n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1$　並べる道具

②${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$　選ぶ道具

道具の運用

- 流れ作業はかけざん
- 場合分けはたしざん
- 場合分けがメンドウなとき，（～でないとき）を考えて全体からひきざん
- 区別のできない同じものを数えるときは，その個数の階乗でわりざん。

※　場合わけでは，モレ・ダブりが発生しないように注意することが大切。

運用の例　～　公式化しているもの

1　円順列　⇒　固定がポイント

2　ネックレス順列　⇒　円順列÷２

3　重複順列　⇒　流れ作業＝かけざん　がわかっていれば公式不要

4　重複組み合わせ

異なるn種類のものから，重複を許してk個選ぶ選び方は，${}_n\mathrm{H}_k$通り

これは，
$$x_1+x_2+\cdots+x_n=k$$
$$0\leq x_1,x_2,\cdots,x_n\leq k$$
を満たす整数解$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$の組の総数に他ならない。

○をk個，｜を$(n-1)$個，一列に並べると考えると，
$${}_n\mathrm{H}_k=\frac{\left\{k+(n-1)\right\}!}{k!\cdot(n-1)!}$$

数え上げ

辞書式配列　⇒　数字に対応させて小さい順に並べる
登場人物の整理
スコアカードに記録
ありうる状態の列挙（漸化式へつながる）

積が○の倍数＝素因数に着目
和が○の倍数＝あまりで分類

特殊な場合の数の求め方のチェックシート

○　隣り合う　⇒　かたまりを作って並べる
○　隣り合わない　⇒　①余事象　②スキマ両端
○　順番キープ　⇒　場所確保　（同じものと見なして並べる）
○　区別のないものの個数が問題　⇒　マルを棒で仕切る　（重複組合せ）
○　最短経路　⇒　タテ，ヨコの移動の順番を考える
○　組分け問題　⇒　区別のできない同数の組があればその組数の階乗でわりざん

○　場合の数漸化式の例
　（１）Fibobacchi 数列
　（２）モンモール数（完全順列，攪乱順列）

場合の数・診断テスト

【例題 01】
種類の異なるＴシャツ５枚，Ｇパン３本，服装の選び方は何通りあるか。

【例題 02】
種類の異なるＴシャツ５枚，Ｇパン３本，スカート４枚，服装の選び方は何通りあるか。
ただし，Ｇパンとスカートの重ね着は行わないものとする。

【例題 03】
C,O,M,P,A,N,Y の７文字を一列に並べるとき，Ｃ と Ｙ が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

【例題 04】
S,C,H,O,O,L の６文字を一列に並べる並べ方は何通りあるか。

【例題 05】
両親と，子供４人で円形に並ぶ。両親が隣り合う並び方は何通りあるか。

【例題 06】
異なる６個の宝石をつないでネックレスを作るとき，作り方は何通りあるか。

【例題 07】
(1) a,b,c の３文字から，重複を許して５文字並べて単語を作るとき，作り方は何通りあるか。
(2)A，B，C の３つの部屋に，５人を分ける分け方は何通りあるか。ただし，空き部屋があっても良いものとする。

【例題 08】
(1) 10 個のりんごを A 君，B 君，C 君の３人に分けるとき，分け方は何通りあるか。ただし，１つももらえない者がいても良いものとする。
(2) $x+y+z=10$ を満たす０以上の整数 x, y, z の組 (x, y, z) の総数は何組あるか。

【例題 09】
異なる 9 冊の本を 3 冊ずつ 3 組に分ける分け方は何通りあるか。

【例題 10】
(1) A，B，C の 3 つの部屋に，5 人を分ける分け方は何通りあるか。
(2) A，B，C の 3 つの部屋に，n 人を分ける分け方は何通りあるか。
ただし，(1)(2)ともに，空き部屋があってはならないものとする。

【例題 11】
赤球 4 個，白球 2 個，黒球 1 個をつないでブレスレットを作る。作り方は何通りあるか。

診断テスト（発展篇）

【例題 12】
n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし，1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。以下に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めよ。
(1) 1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。
(2) 互いに区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。
(3) 1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合
(4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別がつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合。

（東京大）

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより

標準問題

⑫5-標-1

JAPANESE の 8 文字から 7 文字取り出して一列に並べる方法は何通りあるか。

⑫5-標-2

両親と 4 人の子供（息子 2 人，娘 2 人）が円形に座る

（1）両親が隣り合う座り方は何通りあるか。

（2）男性と女性が交互に座る座り方は何通りあるか。

⑫5-標-3

12 冊の異なる本を次のように分ける方法は何通りあるか。

（1）5 冊，4 冊，3 冊の 3 組に分ける。

（2）4 冊ずつ 3 組に分ける。

（3）8 冊，2 冊，2 冊の 3 組に分ける

⑫5-標-4

（1）a, b, c, d を負でない整数とするとき，$a+b+c+d=10$ を満たす解は何通りあるか。

（2）a, b, c, d を自然数とするとき，$a+b+c+d=10$ を満たす解は何通りあるか。

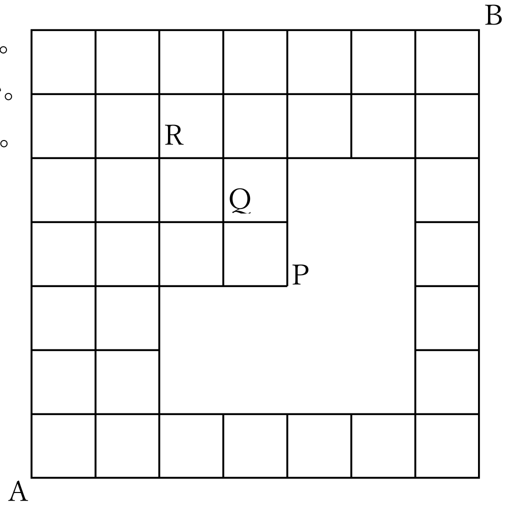
⑫5-標-5

ガラスでできた球で，赤色のものが 6 個，青色のものが 2 個，透明なものが 1 個ある。球には，中心を通って穴が開いているとする。これらの玉に糸を通して首輪を作る方法は何通りあるか。

⑫5-標-6

　図のような道をもつ町がある。この町の西南端 A から東北端 B に至る最短路について，次の問いに答えよ。

（1）途中で地点 P を通るものは何通りあるか。
（2）途中で地点 Q を通るものは何通りあるか。
（3）途中で地点 R を通るものは何通りあるか。
（4）全部で何通りあるか。



発展問題

⑫5-発-1

　MATUTAKE の 8 文字を全部使ってできる順列をアルファベット順に辞書式に配列するとき，次の問いに答えよ。

(1)　1990 番目の文字列は何か

(2)　UME という 3 文字が連続して並ぶ文字列が最初に現れるのは何番目か。

⑫ **5-発-2**

7 個の文字 T,O,K,Y,O,T,O を 1 列に並べる並べ方について，次の問いに答えよ。

(1)　T が 2 つ隣り合い，O が 3 つ隣り合う並べ方は何通りあるか。

(2)　O は 3 つ隣り合うが，2 つの T は隣り合わない並べ方は何通りあるか。

(3)　2 つの T は隣り合うが，3 つの O はどの 2 つも隣り合わない並べ方は何通りあるか。

(4)　同じ文字が全く隣り合わない並べ方は何通りあるか。

⑫ **5-発-3**

$x+y+z+w \leq 12$ を満たす非負整数の組 (x, y, z, w) は何組あるか。

過去問めぐり

⑫ **5-発-4**　**2011 獨協医科大学**

1 から n までの通し番号がついた n 個の箱と，1 から n までの通し番号がついた n 個の球がある。n 個の箱に 1 つずつ球を入れる方法の数は $n!$ 通りだけあるが，このうち箱の番号と球の番号とがすべて異なるような入れ方の総数を a_n とする。たとえば，$a_1=0$，$a_2=1$ である。

(1)　$a_3=\boxed{\text{ア}}$，$a_4=\boxed{\text{イ}}$ である。

(2)　a_{n+1} について考える。$n+1$ 番の球を 1 番の箱に入れる場合は，1 番の球が $n+1$ 番の箱に入る場合と入らない場合を考えれば $a_{n-\boxed{\text{ウ}}}+a_n$ 通りだけあることがわかる。$n+1$ 番の球が他の箱に入る場合も同様なので，$a_{n+1}=n(a_{n-\boxed{\text{ウ}}}+a_n)$　$(n \geqq \boxed{\text{エ}})$ となる。

(3)　$n \geqq \boxed{\text{エ}}$ のとき，$a_n-na_{n-\boxed{\text{ウ}}}=(\boxed{\text{オカ}})^n$ である。

(4)　$n \geqq \boxed{\text{エ}}$ のとき，$\dfrac{a_n}{n!}=\displaystyle\sum_{k=\boxed{\text{キ}}}^{n}\dfrac{(\boxed{\text{クケ}})^k}{k!}$ である。

⑫5-発-5　2012 東海大学 2/2

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。$a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$　$(n=1，2，3，\cdots)$

$n \geqq 3$のとき，a_nを$a_n=\dfrac{c_n}{b_n}$と表す。ここで，b_n，c_nは互いに素な自然数である。$n=1$のとき，$b_1=1$，$c_1=0$，$n=2$のとき，$b_2=1$，$c_2=1$と定める。

(1)　b_{n+1}，c_{n+1}をb_n，c_nで表すと$b_{n+1}=\boxed{\text{ア}}$，$c_{n+1}=\boxed{\text{イ}}$である。

(2)　pを定数とする。$n \geqq 2$のとき，数列$\{c_n\}$において，漸化式$c_{n+1}=p(c_n+c_{n-1})$が成り立つならば，$p=\boxed{\text{ウ}}$である。この漸化式から$c_{n+1}-\alpha c_n=\beta(c_n-\alpha c_{n-1})$，$c_{n+1}-\beta c_n=\alpha(c_n-\beta c_{n-1})$　$(n \geqq 2)$を満たす定数α, βが定まる。$\alpha>\beta$であるとき，$\alpha=\boxed{\text{エ}}$，$\beta=\boxed{\text{オ}}$である。

(3)　α, βを(2)で求めたものとする。一般項c_nをα, β, nで表すと$c_n=\boxed{\text{カ}}$である。また，一般項a_nをα, β, nで表すと$a_n=\boxed{\text{キ}}$である。したがって，数列$\{a_n\}$は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{\text{ク}}$である。

⑫5-発-6　名古屋市立大学（改変あり）

m箇所の送信施設を持つA国から，n箇所の受信施設を持つB国へ信号を送る。A国の各施設はB国の施設の中のただ1箇所に必ず信号を送るものとし，その送受信はいっせいに行われる。いま$m \geqq n$とし，B国のどの受信施設もA国のどこかの送信施設からの信号を少なくとも1つは受信する場合を考える。このような送信パターンの数を$f(m,n)$と表す。以下でm, nを変化させて考えるとき，次の問いに答えよ。

（１）$f(m,3)$をmを用いて表せ。

（２）$f(m+1,n)$を$f(m,n)$および$f(m,n-1)$を用いて表せ。ただし，$n \geqq 2$とする。

SoyPaste 場合の数

SP⑫5-1 (r15-1)

赤色，青色，黄色のカードがそれぞれ6枚ずつある．これら18枚のカードから6枚を取り出して横一列に並べるとき，色の並べ方について中央で左右対称となるものは(　　)通りある．

また，それぞれの色のカードが少なくとも1枚は使われるような並べ方は(　　)通りある．

SP⑫5-2 (j1-1)　○

7個の文字F，G，G，I，I，U，Uを横一列に並べる．

(1) 「GIFU」という連続した4文字が現れるように並べる方法は何通りか．

(2) 「GI」，「FU」という連続した2文字がともに現れ，少なくとも1つの「GI」が「FU」よりも左にあるように並べる方法は何通りか．

SP⑫5-3 (j4-1)　○

0，1，2，3，4，5の数字が1つずつ記入した6枚のカードが入っている箱から1枚ずつ3枚のカードを取り出し，左から並べて自然数nを作る．ただし，012は12を表すものとする．

(1) nが3桁の自然数となるのは何通りか．

(2) 3桁の自然数nを作った後，箱の中に残っている3枚のカードを左から並べて3桁の自然数mを作るとき，$n+m=555$となるのは何通りか．

SP⑫5-4（j12-5） ○

a，b，c は 1 以上 n 以下の整数とする．

(1) $a<b<c$ となる a，b，c の組は全部で，$\boxed{\textbf{(1)}}$ 通りある．

(2) $a \leqq b \leqq c$ となる a，b，c の組は全部で，$\boxed{\textbf{(2)}}$ 通りある．

(3) $a<b$ かつ $a \leqq c$ となる a，b，c の組は全部で，$\boxed{\textbf{(3)}}$ 通りある．

SP⑫5-5（r14-2） ○

1 分ごとに 1 回の割合で 2 つに分裂する細胞がある．この細胞には A，B の 2 つのタイプがあり，タイプ A はタイプ A とタイプ B に，タイプ B は 2 つのタイプ A にそれぞれ分裂する．最初のタイプ A，タイプ B の細胞の個数をそれぞれ 1，0 とし，n 分後のタイプ A，タイプ B の細胞の個数をそれぞれ a_n，b_n とする．

(1) a_n+b_n を求めよ．

(2) a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n を用いて表せ．

(3) a_n-2b_n を求めよ．

(4) a_n，b_n を求めよ．

SP⑫5-6 (j15-3)　△

5 個の整数 1，2，3，4，5 の中から，重複を許して 3 個取り出して a，b，c とし，3 桁の整数

$$X = 100a + 10b + c$$

を作る.

(1) 整数 X は全部で何通りできるか.

(2) 偶数の X，3 の倍数の X，5 の倍数の X，7 の倍数の X，13 の倍数の X はそれぞれ何通りできるか.

SP⑫5-7（j35-5）　△

三つの文字 a，b，c を用いた文字列で，次の(ⅰ)と(ⅱ)を満たすものを考える。

(ⅰ)　最初の文字は a である。
(ⅱ)　同じ文字が二つ以上続くことはない。すなわち，文字列の中に aa，bb，cc は現れない。

含まれる文字の個数をその文字列の長さとよぶ。たとえば，abcba は(ⅰ)と(ⅱ)を満たす文字列であり，その長さは 5 である。

n は自然数とする。最後の文字が a である長さ n の文字列の個数を a_n とし，最後の文字が b である長さ n の文字列の個数を b_n とし，最後の文字が c である長さ n の文字列の個数を c_n とする。

長さ 1 の文字列は a のみであり，長さ 2 の文字列は ab，ac のみであるので，$a_1=1$，$b_1=0$，$c_1=0$，$a_2=0$，$b_2=1$，$c_2=1$ である。同様にして $a_3=\boxed{ア}$，$b_3=\boxed{イ}$，$c_3=\boxed{ウ}$ であり，$a_4=\boxed{エ}$ である。

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について

$$a_{n+1}=\boxed{オ}$$

が成り立つ。ただし，$\boxed{オ}$ については，当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　a_n+b_n　①　a_n-b_n　②　b_n+c_n
③　b_n-c_n　④　c_n+a_n　⑤　c_n-a_n

同様に，b_{n+1}，c_{n+1} も a_n，b_n，c_n を用いて表すことができる。

$b_n-c_n=\boxed{カ}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であり，したがって，$b_n=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}a_{n+1}$ である。

$d_n=a_n+b_n+c_n$ とおくと

$$d_1=\boxed{ケ},\quad d_{n+1}=\boxed{コ}d_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つから，$d_n=\boxed{コ}^{n-\boxed{サ}}$ である。また，$r=\boxed{シス}$ のとき

$$a_{n+1}=ra_n+d_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つので，$A_n=r^{-n}a_n$ とおくと

$$A_{n+1}=A_n+r^{-n-1}d_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。これらより，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$a_n=\frac{1}{\boxed{セ}}\boxed{ソ}^{n-1}+\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}r^{n-1}$$

である。

SP⑫5-8（j19-5）　◎

硬貨を繰り返して投げる。同じ面がちょうど n 回だけ続いて出たとき，そのひと続きの並びを連と呼び，n をその連の長さと呼ぶことにする。ただし，$n=1$ の場合も含む。

硬貨を 6 回繰り返して投げる。このとき，現れる連の長さの最大値を得点とする。例えば，出た面が (表，表，裏，裏，表，裏) のときは，連の長さは順に 2，2，1，1 であるから，得点は 2 点であり，出た面が (表，表，表，裏，裏，表) のときは，連の長さは順に 3，2，1 であるから，得点は 3 点である。

(1)　得点が 5 点となるのは $\boxed{\text{ア}}$ 通りである。

得点が 2 点となる場合，長さ 2 の連が 1 度だけ現れるのは $\boxed{\text{イウ}}$ 通り，ちょうど 2 度現れるのは $\boxed{\text{エオ}}$ 通り，3 度現れるのは $\boxed{\text{カ}}$ 通りである。

(2)　得点が 1 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$，得点が 4 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$，得点が 6 点である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。