指数対数の方程式・不等式

（１）隠れた条件に注意　真数条件・底の条件など

（２）底をできるだけ簡単なものに統一

（３）両辺同形に持ち込む

$a^{\blacktriangle}=a^{\blacksquare}$ ，$\log_a \blacktriangle=\log_a \blacksquare$ など

（４）ダメなら文字の置き換え

（５）不等式では底の１との大小に注意

１より大なら大小そのまま，１より小なら大小逆転

【例題 01】（久留米 2002）　連立方程式

$$\begin{cases}\log_2 x+y=5\\ x-2^y=6\sqrt{2}\end{cases}$$

を解くと，$x=\boxed{\quad ① \quad}$，$y=\boxed{\quad ② \quad}$となる。

【例題 02】（2012 昭和）

$x>0$，$x\neq 1$のとき，$1+\dfrac{1}{\log_2 x}-\dfrac{3}{\log_3 x}<0$を満たす$x$の範囲を求めよ。

【例題 03】（2013 昭和）

不等式$9a>b$，$\log_a b>\log_b a^4+3$をすべて満たす整数$a,\ b$の値を求めよ。

談話室マロニエ　数学 QUIZ　指数対数関数

A 問題

次の公式を完成させせよ。公式でないものについては × をつけよ。

$a^x + a^y = a^{\boxed{ア}}$

$a^x \cdot a^y = a^{\boxed{イ}}$

$(a^x)^y = a^{\boxed{ウ}}$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{\boxed{エ}}$

$\sqrt[m]{a}$ の定義を述べよ。$\boxed{\quad オ \quad}$

$\log_a b$ の定義を，指数の式を用いて説明せよ。$\boxed{\quad カ \quad}$

$\log_a a = \boxed{\quad キ \quad}$, $\log_a 1 = \boxed{\quad ク \quad}$

$\log_a (M+N) = \boxed{\quad ケ \quad}$

$\log_a (MN) = \boxed{\quad コ \quad}$

$\log_a \dfrac{M}{N} = \boxed{\quad サ \quad}$

$\log_a M^r = \boxed{\quad シ \quad}$

底の変換公式　$\log_a M = \boxed{\quad ス \quad}$ （底を b に直せ）

B 問題

指数・対数の方程式・不等式

（１）隠れた条件に注意　真数条件・底の条件など

（２）底をできるだけ簡単なものに統一

（３）両辺同形に持ち込む

$a^{\blacktriangle} = a^{\blacksquare}$ ，$\log_a \blacktriangle = \log_a \blacksquare$ など

（４）ダメなら文字の置き換え

（５）不等式では底の１との大小に注意

１より大なら大小そのまま，１より小なら大小逆転

積・商・指数は log をとる！

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 指数対数篇

標準問題

⑫8-標-1

$a>0$ とするとき，次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。

$$a^{2x}+1<a^{x+2}+a^{x-2}$$

⑫8-標-2

$\log_2 x=\log_3 y=\log_4 z=\log_5 w$ のとき，$x^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$, $z^{\frac{1}{4}}$, $w^{\frac{1}{5}}$ の大小を比較せよ。

⑫8-標-3

$\log_{10}5=a,\ \log_2 6=b$ とするとき，$\log_4 0.12$ の値を a, b を用いて表せ。

⑫8-標-4

次の不等式を解け。ただし，$a>0,\ a\fallingdotseq 0$ とする。

$$\log_a(x+a)-\log_{a^2}(5x-a)<\frac{1}{2}$$

⑫8-標-5

不等式 $\log_x y+2\log_y x\leq 3$ を満たす点 $\left(x, y\right)$ が存在する範囲を図示せよ。

⑫8-標-6

$\log_{10}2=0.3010,\ \log_{10}3=0.4771$ とする。

（1）5^{300} は何桁の数か。また，最高位の数字は何か。

（2）$\left(\dfrac{2}{9}\right)^{10}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。また，その数字は何か。

計算問題（自習用）

⑫**8-標-7** $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[5]{6}$ の大小を比較せよ

⑫**8-標-8** $4^x+4^{-x}=7$ のとき，4^x-4^{-x}，8^x+8^{-x} の値を求めよ。

⑫**8-標-9** 次の方程式を解け $2^{3x}-7\cdot 2^{2x}+7\cdot 2^{x+1}-8=0$

⑫**8-標-10** 次の不等式を解け。

（1）$2\cdot 4^x-17\cdot 2^x+8<0$

（2）$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x+\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>12$

⑫**8-標-11** $\log_{10}2=a,\ \log_{10}3=b$ とするとき，次の式を a, b で表せ。

（1）$\log_{10}45$　　（2）$\log_3\sqrt{5}$　　（3）$\log_{24}36$

⑫**8-標-12** $2^x=54^y=6$ のとき，$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

⑫**8-標-13** 次の方程式を解け。

（1）$\log_5(2x-1)+\log_5(x-2)=1$

（2）$\log_2 x+\log_x 16=4$

（3）$\left(\log_2 x\right)^3-\left(\log_4 x^2\right)^2+\log_{16}x=0$

（4）$2^{\log_{10}x}-\dfrac{1}{4}x^{\log_{10}4}=0$

⑫**8-標-14** 次の不等式を解け。

（1）$\log_2(9-x)-2\log_2(x+3)+4>0$

（2）$\log_{\frac{1}{4}}(2+x)-1\leq\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$

（3）$\log_9\left(\log_2 x-1\right)\leq\dfrac{1}{2}$

（4）$\log_a\left(3x^2-3x-18\right)>\log_a\left(2x^2-10x\right)$　　ただし，$a>0,\ a\neq 1$ とする。

発展問題

⑫8-発-1

関数 $f(x)=\dfrac{10^x-10^{-x}}{2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2)　$f^{-1}(x)>\log_{10}x$ を解け。

⑫8-発-2

次の数の大小関係を調べよ。

$$\frac{2}{3},\ \log_5 3,\ \log_{\sqrt{3}} 2,\ \frac{1}{\log_7 27},\ \log_{\frac{1}{2}} 6$$

⑫8-発-3

a, b, c は 2 を自然数乗して得られる数で，$a^x=b^y=c^z$，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ を満たす。さらに，$\log_2 c=\log_b a$ が成り立つとき，a, b, c を求めよ。

⑫**8-発-4**

(1) a を実数とする。2 つの不等式 $4 \leq x+a<5,\ 12 \leq x+3a<13$ を同時に満たす x が存在するための a の値の範囲を求めよ。

(2) y は正の実数とする。適当な正の実数 b をとると，by と by^3 の整数部分はそれぞれ 5 桁，13 桁になる。このような y の範囲を求めよ。

⑫**8-発-5**

(1) $\log_2 5$ は無理数であることを証明せよ。

(2) $p \geq 2,\ q \geq 1$ なる整数 $p,\ q$ に対して，$\left\{\log_p(p+1)\right\}^{\frac{1}{q}}$ は無理数であることを証明せよ。

SoyPaste 指数関数

SP⑫8-1 (r30-1)　○

次の問に答えよ．

(1) 84^{12} の桁数を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$，$\log_{10} 7 = 0.845$ とする．

(2) $\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{20}\right)\right\}^{20}$ は，小数第(　　)桁に初めて0でない数字が現れる．必要ならば，$\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いよ．

SP⑫8-2 (r42-1)　○

次の不等式を解け．

(1) $\log_2(x-1) - \log_4(x+1) \leqq 1$

(2) $\log_2|x-1| + \log_{\frac{1}{4}}|4-x| < 2$

SP⑫8-3 (j42-2)　○

a を実数とする．x に関する方程式 $\log_3(x-1) = \log_9(4x-a-3)$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めよ．

SP⑫8-4 (j1-4)　○

定数 k に対して，方程式

$$(\log_2 x)^2-(k+2)\log_2 x-k+17=0 \qquad \cdots (*)$$

を考える．

(1) 方程式 $(*)$ が実数解 α，β をもつとき，$\log_2 \alpha\beta$ と $(\log_2 \alpha)(\log_2 \beta)$ を k を用いて表せ．

(2) 方程式 $(*)$ のすべての解が 4 より大きくなるような定数 k の値の範囲を求めよ．

SP⑫8-5 (j6-1)

0 でない実数 x，y，z，w と正の整数 a，b，c，d が，

$$a^x=b^y=c^z=d^w,\quad \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{w}$$

を満たすものとする．ただし，$a>b>c>1$，$d>1$ とする．

(1) a，b，c を用いて d を表せ．

(2) $d \leqq 1000$ かつ $\sqrt{d}$ が整数であるような d を 1 つ求めよ．

SP⑫8-6 (s18-2)　☆

次の問に答えよ．ただし，$\log_{10} 2=0.3010$ とする．

(1) 次の式を満たす整数 k の値を求めよ．

$$10^4<2^k<2\cdot 10^4$$

(2) 2012 個の 2 の累乗 2^1，2^2，2^3，$\cdots$，2^{2012} のうち，十進法で表したとき，その最高位の数字が 1 であるものの個数を求めよ．

SP⑫8-7 (j30-2)　○

同じ材質，同じ厚さのガラス板 24 枚を重ねて，光を入射したところ透過光の強さは $\frac{1}{8}$ に減じた．この光の強さを $\frac{1}{2}$ にするためには，何枚のガラス板を重ねればよいか．

SP⑫8-8(j32-1)　△

$(5^{100})!$ を 10 進法で表すと，末尾に 0 が n 個並ぶ．n は何桁の整数か．

ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

SP⑫8-9(s32-4)　☆

$\sum_{n=0}^{100} 3^n$ の桁数を求めよ．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

SP⑫8-10 (j23-5)

$u=\log_2(6-x)$, $v=\log_2(x-1)$ とおく。uv の最大値を求めよう。

真数は正であるから $\boxed{ア} < x < \boxed{イ}$ である。

$\boxed{ア} < x \leqq \boxed{ウ}$ または $\boxed{エ} \leqq x < \boxed{イ}$ のとき，$uv \leqq 0$ であり，

$\boxed{ウ} < x < \boxed{エ}$ のとき，$u>0$, $v>0$ である。

よって，uv の最大値は $\boxed{ウ} < x < \boxed{エ}$ の範囲で考えればよい。

このとき，相加平均と相乗平均の関係により

$$\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}(u+v) = \frac{1}{2}\log_2\left(\boxed{オ}x^2+\boxed{カ}x-\boxed{キ}\right) \quad \cdots\cdots (*)$$

である。

x の 2 次関数 $\boxed{オ}x^2+\boxed{カ}x-\boxed{キ}$ は $x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}$ をとる。

$\boxed{ウ} < \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}} < \boxed{エ}$ であり，$x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ のとき，$(*)$ の不等式において等号が成り立つ。したがって，uv は $x=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ のときに最大値

$$\left(\log_2\boxed{ス}-\boxed{セ}\right)^{\boxed{ソ}}$$

をとる。

SP⑫8-11 (j24-5)

$a=\log_4 x$, $b=\log_2 y$ とする．

(1) $2a+b=2$ のとき，$\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{y}$ の最小値は $\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$ である．

(2) $\log_{x^3y^2}\left(\dfrac{y^3}{x^2}\right)$ を a と b で表すと，$\dfrac{\boxed{ウエ}a+\boxed{オ}b}{\boxed{カ}a+\boxed{キ}b}$ である．

(3) $x=2t+3$, $y=1-t$ とすると，t のとる値の範囲は，

$$\frac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}<t<\boxed{サ}$$

である．さらに，$a-b=1$ ならば，

$$\boxed{シ}t^2-\boxed{スセ}t+1=0$$

であるから，

$$t=\frac{\boxed{ソ}-\sqrt{\boxed{タチ}}}{\boxed{ツ}}$$

となる．