三角関数の諸公式

三角関数の定義

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

三角関数の基本公式

①$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

②$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

④$-1\leqq\sin\theta\leqq1, -1\leqq\cos\theta\leqq1$

加法定理

①$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

②$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

③$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

2倍角公式

①$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

②$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=2\cos^2\theta-1$

$=1-2\sin^2\theta$

3倍角公式

①$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

②$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

半角公式

①$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin2\theta}{2}$

②$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$

③$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

積和変換

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

和積変換

$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

変換公式

①$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$, $\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$, $\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$

②$\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

③$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

④$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$, $\tan(\pi-\theta)=\tan\theta$

⑤$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

⑥$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$, $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

三角関数の典型問題

① $\sin x,\cos x$ の１次式　⇒　合成

② $\sin x,\cos x$ の２次同次式　⇒　半角＆合成

③ $\sin x,\cos x$ の対称式　⇒　$t=\sin x+\cos x$　でおきかえ

最後の手段

① $\sin x=Y,\cos x=X$ とおくと，$X^2+Y^2=1$ となり，座標平面に帰着できる

② $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ となり，分数計算に帰着できる。

準有名角

① $\boxed{15^\circ\ \ \text{family}}$ ～　加法定理から

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ ,\quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\quad \tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ ,\quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\quad \tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$$

② $\boxed{22.5^\circ\ \ \text{family}}$ ～　半角公式から

$$\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\ ,\quad \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \tan 22.5^\circ = \sqrt{2}-1$$

③ $\boxed{18^\circ\ \ \text{family}}$ ～　2 倍角 &3 倍角，正 5 角形の対角線利用，相似利用

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4},\qquad \cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

三角関数基本チェック

【例題 01】　$0 \leqq x < \pi$ のとき，方程式 $2\cos 2x + 2(\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{3} = 2$ を解け

【例題 02】　関数 $f(x) = 3\sin 2x - 4\cos 2x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 03】　関数 $f(x) = \sin 2x - \sin x - \cos x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 04】　関数 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 4\cos^2 x$ の最大値と最小値を求めよ。

【例題 05】　関数 $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x - 2}$ の最大値と最小値を求めよ。

談話室マロニエ　数学 QUIZ　三角関数

A 問題

三角関数の定義を述べよ。（略）

三角関数の相互関係について，

①　$\sin\theta, \cos\theta$ の関係は $\boxed{\text{ア}}$，

②　$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ の関係は $\boxed{\text{イ}}$，

③　$\cos\theta, \tan\theta$ の関係は $\boxed{\text{ウ}}$

①の証明のポイントは，$\boxed{\text{エ}}$ である。

②は定義から明らか。

③の証明のポイントは，$\boxed{\text{オ}}$ である。

加法定理　$\sin(\alpha+\beta)=\boxed{\text{カ}}$，

$\cos(\alpha+\beta)=\boxed{\text{キ}}$，

$\tan(\alpha+\beta)=\boxed{\text{ク}}$

２倍角公式　$\sin 2\theta=\boxed{\text{ケ}}$，

$\cos 2\theta=\boxed{\text{コ}}$

$=\boxed{\text{サ}}$

$=\boxed{\text{シ}}$，

３倍角公式　$\sin 3\theta =$ $\boxed{\text{ス}}$,

$\cos 3\theta =$ $\boxed{\text{セ}}$,

半角公式　$\boxed{\text{ソ}}$, $\boxed{\text{タ}}$ ←2 種類を両辺ともに書け。

三角関数の合成　$a\sin\theta + b\cos\theta =$ $\boxed{\text{チ}}$，ただしαは $\boxed{\text{ツ}}$ で定まる角（$0 \leq \alpha < 2\pi$）

$\boxed{\text{ツ}}$は式で説明しても，図で説明しても OK。a, b は両方とも 0 にはならないものとする。
$\boxed{\text{チ}}$は $\boxed{\text{テ}}$ を用いて導ける。

B 問題

三角関数の変換公式～単位円を用いて証明できるが，$\boxed{\text{ト}}$ を用いても導ける。

ただし，$\boxed{⑨}$, $\boxed{⑮}$を除く。また，$\boxed{\text{ト}}$を用いる方法は，厳密な証明にはなっていない（循環論法）。

$\sin(\theta + 2n\pi) =$ $\boxed{①}$, $\cos(\theta + 2n\pi) =$ $\boxed{②}$, $\tan(\theta + 2n\pi) =$ $\boxed{③}$

$\sin(-\theta) =$ $\boxed{④}$, $\cos(-\theta) =$ $\boxed{⑤}$, $\tan(-\theta) =$ $\boxed{⑥}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$ $\boxed{⑦}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$ $\boxed{⑧}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$ $\boxed{⑨}$

$\sin(\pi - \theta) =$ $\boxed{⑩}$, $\cos(\pi - \theta) =$ $\boxed{⑪}$, $\tan(\pi - \theta) =$ $\boxed{⑫}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) =$ $\boxed{⑬}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) =$ $\boxed{⑭}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) =$ $\boxed{⑮}$

$\sin(\pi + \theta) =$ $\boxed{⑯}$, $\cos(\pi + \theta) =$ $\boxed{⑰}$, $\tan(\pi + \theta) =$ $\boxed{⑱}$

積和変換も和積変換も，ともに$\boxed{\text{ナ}}$を用いて導ける。

　積和変換をすべて書け。$\boxed{\text{ニ}}$, $\boxed{\text{ヌ}}$, $\boxed{\text{ネ}}$, $\boxed{\text{ノ}}$

　和積変換をすべて書け。$\boxed{\text{ハ}}$, $\boxed{\text{ヒ}}$, $\boxed{\text{フ}}$, $\boxed{\text{ヘ}}$

関数　$a\sin\theta + b\cos\theta$（一次型）　⇒　$\boxed{\text{ホ}}$

関数　$a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$（二次同次型）　⇒　$\boxed{\text{マ}}$

関数　$(\sin\theta + \cos\theta)$，$\sin\theta\cdot\cos\theta$ を含む（対称式型）　⇒　$\boxed{\text{ミ}}$

$\boxed{\text{C 問題}}$

$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，$\sin\theta = \boxed{\text{ム}}$, $\cos\theta = \boxed{\text{メ}}$, $\tan\theta = \boxed{\text{モ}}$

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 三角関数篇

標準問題

⑫6-標-1

α, β は鋭角とする。

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta + 2\cos\gamma = 0 \\ \cos\alpha + \cos\beta + 2\sin\gamma = 0 \end{cases}$$

のとき，$\alpha = \beta$ となることを証明せよ。

⑫6-標-2

$\triangle ABC$ において，

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$$

が成り立つことを証明せよ。

⑫6-標-3

(1) $\sin 2x - \sin x - 2\cos x + 1 \leq 0 \quad (0 \leq x < 2\pi)$ を解け

(2) 次の連立方程式を解け

$$\begin{cases} \cos 2x - 3\sin x + 1 \leq 0 \\ \cos 2x + 3\cos x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

⑫6-標-4

(1) $\cos 5\theta$ を $\cos\theta$ の多項式で表せ。

(2) $\cos^2 18°$，$\cos 36°$ の値を求めよ。

(3) 一辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求めよ。

⑫**6-標-5**

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において，

$$\begin{cases} f(\theta) = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta \\ g(\theta) = \cos 4\theta - \sqrt{3}\sin 4\theta \end{cases}$$

とするとき，$f(\theta)$, $g(\theta)$ の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ。

⑫**6-標-6**

点 $(x,\ y)$ が，原点 O を中心とする半径 2 の円周上，第 1 象限の部分を動くとき，$x^2 + 4xy - 2y^2$ のとり得る値の範囲を求めよ。

⑫**6-標-7**

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{5}$ のとき，$\tan\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ。

(2) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan\theta + \sin\theta > 4\tan\dfrac{\theta}{2}$ が成り立つことを証明せよ。

⑫**6-標-8**

次の式の値を求めよ。

(1) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$

(2) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ$

⑫**6-標-9**

△ABC において，$\cos A+\cos B+\cos C-4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ の値は一定値になる。この値を求めよ。

⑫**6-標-10**

$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$

$f(\theta)=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta$，$g(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$ とする。

（1）$f(\theta)$, $g(\theta)$ の最大値，最小値を求めよ。

（2）$g(\theta)=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ のとき，$\sin\theta$ を求めよ。

計算問題（自習用）

⑫**6-標-11**

（1） $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$　ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする。

このとき，$\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

（2） α は第 1 象限，β は第 3 象限の角で，$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$ のとき，

$\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

⑫**6-標-12**

（1） α, β, γ は鋭角で，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{5}$, $\tan\gamma=\dfrac{1}{8}$ のとき，$\alpha+\beta+\gamma$ を求めよ。

（2） $y=3x$ と $y=\dfrac{1}{2}x$ のなす角を求めよ。

⑫**6-標-13**

方程式 $\sin 2\theta-\sin\theta-2\cos\theta+1=0$ $(0\leq\theta<2\pi)$ を解け。

⑫**6-標-14**

次の方程式を解け

（1） $\cos 2\theta-3\cos\theta+2=0$

（2） $\cos 2\theta-\sin\theta<0$ $(0\leq\theta<2\pi)$

⑫**6-標-15**

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin 3\theta+\cos 3\theta$ の値を求めよ。

⑫**6-標-16**

関数 $f(x)=2\sqrt{3}\cos^2 x+6\sin x\cos x+8\sqrt{3}\sin^2 x$ $(0\leq x\leq\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。

⑫**6-標-17**

（1） $\cos 5\theta\sin 3\theta$ を和または差の形に変換せよ。

（2） $\cos 20^\circ\cos 80^\circ\cos 140^\circ$ の値を求めよ。

⑫**6-標-18**

（1） $\sin 5\theta-\sin 3\theta$ を積の形に変換せよ。

（2） $\cos 10^\circ+\cos 110^\circ+\cos 230^\circ$ の値を求めよ。

発展問題

⑫**6-発-1**

xy 平面において，O を原点，A を定点 $(1, 0)$ とする。また，P，Q は円 $x^2+y^2=1$ 上を動く 2 点であって，線分 OA から正の向きに回って線分 OP に至る角と，線分 OP から正の向きに回って線分 OQ に至る角が等しいという関係が成り立っているものとする。

点 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を R，点 Q を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を S とする。実数 $l \geq 0$ を与えたとき, 線分 RS の長さが l と等しくなるような点 P, Q の位置は何通りあるか。

⑫**6-発-2**

実数 x, y が $11x^2+12xy+6y^2=4$ を満たしながら動くとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

⑫**6-発-3**

$0 \leq \theta \leq \pi$ である θ に対して，$\dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta+2}$ の最大値，最小値を求めよ。

⑫ **6-発-4**

(1)　$x=\sin 10^\circ$ を解とする x の3次方程式をつくれ。ただし，x^3 の係数は1とする。

(2)　(1)の3次方程式の残りの2解を $\sin\alpha, \sin\beta$ とする。α, β の値を求めよ。

ただし，$-90^\circ<\alpha<\beta<90^\circ$ とする。

⑫ **6-発-5**

次の関係を満たす (x, y) の存在範囲を図示せよ。

$$\cos x-\cos y\cos(x+y)>0,\ 0\leq x\leq 2\pi,\ 0\leq y\leq 2\pi$$

SoyPaste 三角関数

SP⑫6-1(r1-1)

Oを原点とする座標平面上に，2点 $A(\cos\theta,\ 0)$，$B(0,\ \sin\theta)$ をとる．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) 線分 OA，OB の長さの和の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

(2) 三角形 OAB の面積の最大値とそのときの θ の値を求めよ．

SP⑫6-2(r23-1) ○

a，b，c，d を定数とする．ただし，$b>0$，$c>0$，$0\leqq d<2\pi$ とする．

関数 $f(x)=a+b\sin(cx+d)$ が周期 6π の関数で，$x=\pi$ で最小値 -2 をとり，最大値が 38 であるとき，a，b，c，d の値を求めよ．

SP⑫6-3 (r37-2) ○

方程式 $\cos 2x+a\sin x+b=0$ が，$0\leqq x<2\pi$ の範囲に異なる 4 つの実数解をもつとする．

(1) 実数 a，b の満たす条件を求めよ．

(2) (1) の条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の表す領域を図示せよ．

SP⑫6-4 (s1-1)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ とし，x の 2 次方程式

$$x^2 - 2(\cos\theta + \sin\theta)x + 1 + 2\cos^2\theta = 0 \qquad \cdots (*)$$

の解を α，β とする．ただし，重解の場合は $\alpha = \beta$ とする．

(1)　$(*)$ が実数解をもつような θ の値の範囲を求めよ．

(2)　θ の値が (1) で求めた範囲を変化するとき，$\alpha^2 + \beta^2$ の最大値を求めよ．

(3)　θ の値が (1) で求めた範囲を変化するとき，$\alpha^2 + \beta^2$ の最小値と，そのときの θ の値をすべて求めよ．

SP⑫6-5 (j19-3)　○

関数 $f(x) = -\cos^2 2x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値をそれぞれ求めよ．

SP⑫6-6 (s19-1)　☆

a，b は実数の定数とする．すべての実数 x，y に対して，不等式

$$a(x^2 + y^2) \leqq x^2 + 3xy + 5y^2 \leqq b(x^2 + y^2)$$

が成り立つような a，b のうち，最大の a と最小の b を求めよ．

SP⑫6-7 (j22-3)　○

曲線 $2x^2+y^2-4y=0$ を C とする．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が曲線 C 上を動くとき，xy の最大値と最小値を求めよ．

SP⑫6-8 (j31-2)　☆

すべての x に対して，

$$\sin(x-a)+2\cos(x-a)+b\sin x\sin 2a=0$$

が成り立つとき，$\tan a$ および b の値を求めよ．ただし，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

SP⑫6-9 (j35-2)　△

2 つの関数

$$t=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,$$

$$y=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする．

(1)　$\cos 3\theta$ を t の関数で表せ．

(2)　y を t の関数で表せ．

(3)　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，y の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ．

SP⑫6-10 (j42-1) ○

$\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta\cos 8\theta\cos 16\theta\cos 32\theta$ は $\sin$ を使った最も簡単な式で表すと (　　) となるので,

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ\cos 320^\circ\cos 640^\circ$$

の値は (　　) であることがわかる.

SP⑫6-11 (s42-3) ☆

次の問に答えよ. ただし, t は $0<t<1$ を満たす実数とする.

(1) 次の等式を証明せよ.

$$\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{4}\cos\frac{t}{8}=\frac{\sin t}{8\sin\frac{t}{8}}$$

(2) 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を t を用いて表せ.

$$a_1=\cos\frac{t}{2},\quad a_n=a_{n-1}\cos\frac{t}{2^n}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(3) 数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定義する.

$$b_1=\sqrt{\frac{1}{2}},\quad b_n=\sqrt{\frac{1+b_{n-1}}{2}}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$
$$c_1=\sqrt{\frac{1}{2}},\quad c_n=c_{n-1}b_n\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n$ を求めよ.

SP⑫6-12 **(j20-5)**

中心 O，半径 1 の円周上に定点 A と動点 P，Q があり，P，Q は常に $\angle \mathrm{PAQ} = \dfrac{2}{3}\pi$ 満たしながら動いている．$\angle \mathrm{OAP} = \theta$ とすると，θ の動ける範囲は，

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} < \theta < \frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}}$$

である．

線分 AP，AQ の長さを $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表すと，

$$\mathrm{AP} = \boxed{\text{ウ}}\cos\theta, \qquad \mathrm{AQ} = \sqrt{\boxed{\text{エ}}}\sin\theta - \cos\theta$$

となる．

また，三角形 OPQ の面積は，点 P，Q がどこにあっても常に $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

さらに，三角形 APQ の面積 $S(\theta)$ を $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ を用いて表すと，

$$S(\theta) = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\sin 2\theta - \frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

となり，$S(\theta)$ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき，最大値

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

をとる．

SP⑫6-13（s28-1）

関数

$$f(x) = x^2 + 4\left(\frac{3\tan\theta}{1+\tan^2\theta} - \sqrt{3}\right)x + 3(\sin^2\theta + 3\cos^2\theta)^2$$

について，すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ が成り立つような θ の値の範囲を求めよう。

ただし，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

不等式 $f(x) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つための条件は，2次方程式 $f(x) = 0$ の判別式 D が $D\boxed{\text{ア}}0$ を満たすことである。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜②のうちから一つ選べ。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

2倍角の公式により

$$\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = \boxed{\text{イ}} + \cos 2\theta$$

$$\frac{3\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\sin 2\theta$$

であるから，判別式 D は

$$D = 12\left(\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\sin 2\theta + \cos 2\theta\right)\left(\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\sin 2\theta - \cos 2\theta - \boxed{\text{カ}}\right)$$

と表すことができる。

ここで，

$\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\sin 2\theta - \cos 2\theta - \boxed{\text{カ}}\ \boxed{\text{キ}}\ 0$ である。$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪〜②のうちから一つ選べ。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

また，

$$\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\sin 2\theta + \cos 2\theta = \boxed{\text{ク}}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

であるから，条件 $D\boxed{\text{ア}}0$ により，不等式 $f(x) > 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような θ のとり得る値の範囲は

$$-\frac{\pi}{\boxed{\text{コサ}}} < \theta < \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{コサ}}}\pi$$

であることがわかる。