数学 III の微分計算

$\boxed{\text{微分の定義}}$
↓
$\boxed{\text{微分公式}}$

基本関数の微分公式（7 種）
積の微分公式，商の微分公式，合成関数の微分公式
逆関数微分公式，パラメータ関数の微分公式，対数微分法

dx は，1 回微分までなら分数扱いできる。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

dx は，２回微分では分数扱いできない。

○微分の応用　（数学 II でも扱った）

$\left\{\begin{array}{l}\boxed{\text{接線}}\text{（法線）}\ \rightarrow\ \text{共通接線（3 種），接線本数}\\ \boxed{\text{グラフ}}\ \rightarrow\ \text{関数の最大最小問題，方程式・不等式，図形問題などへ}\end{array}\right.$

※グラフさえかければ，さまざまな問題が解ける。

最大最小問題＝グラフの高さ比べ
方程式＝解を共有点に対応させる　（できれば文字定数分離）
不等式＝グラフの上下関係

○MacLaurin 展開

$f(x)$：何回も微分可能のとき

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+\cdots$$

（例 1）　$f(x)=e^x$ のとき，$f^{(n)}(x)=e^x$，$f^{(n)}(0)=1$ より，

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

（例 2）　$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\cdots$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\cdots$$

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\cdots$$

数学 III のグラフ

基本関数のグラフの拡張　（③１で学習済み）

1）平行移動・対称移動，拡大・縮小

2）２乗のグラフ

3）逆数のグラフ

【例題 01】$y=\dfrac{1}{\sin x}$　　　　$y=\dfrac{1}{\log x}$

4）和のグラフ　一方（簡単な方）に他方を乗せる（軸上）またはケズる（軸下）

5）積のグラフ　0 となる点，軸との上下，両端に着目

6）合成関数のグラフ

7）逆関数のグラフ　$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称

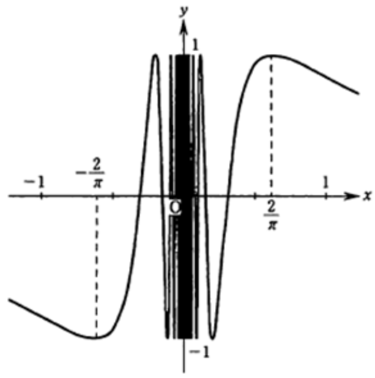
存在条件＝１対１対応

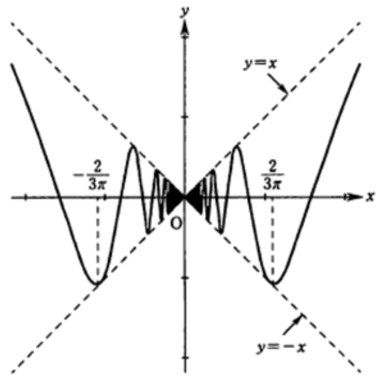
8）勾配関数

（注）漸近線

分母ゼロ⇒タテ漸近線，極限（両端）⇒ヨコ漸近線，ほぼ１次⇒ナナメ漸近線

○病的な関数の連続性・微分可能性





○解けない漸化式の極限

（１）収束を仮定して極限値を推測

（２）グラフで極限値を見る

（３）不等式を作って極限値の絞り込み

グラフ予想図　和と積のチェック

【例題 02】　次の関数の増減と極値を調べて，そのグラフをかけ。

$$y=(1+\cos x)\sin x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

【問題 03】　次の関数の増減，凹凸を調べ，グラフをかけ。

$$y=xe^{-x}$$

【問題 04】　次の関数の増減，凹凸を調べ，グラフの概形をかけ。

$$y=x\log x-x$$

【問題 05】　次の関数のグラフの概形をかけ。

$$y=\frac{\log x}{x}$$

【問題 06】　次の曲線のグラフをかけ。

$$y^2=x^2(x+3)$$

【問題 07】　次の関数のグラフをかけ。

$$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$$

【問題 08】　次の関数のグラフをかけ。

$$y=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$$

【問題 09】　次の関数の増減を調べグラフをかけ。

$$y=\frac{x}{(x-1)^2}$$

【問題 10】　方程式 $\sin x=ae^x$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ に実数解を持つような a の範囲を求めよ。

【問題 11】　$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ の増減・極値・漸近線を調べてグラフを描け。

二変数不等式の証明　☆

① 文字おきかえ
② 平均値の定理
③ 凸関数を利用
④ 一文字固定

【例題 12】　$b \geq a > 0$ とする。不等式 $\log b - \log a \geq \dfrac{2(b-a)}{b+a}$ を証明せよ。

【例題 13】　$0 < a < b$ とする。不等式

$$-(a+1)e^{-a} < \frac{(b+2)e^{-b} - (a+2)e^{-a}}{b-a} < -(b+1)e^{-b}$$

を証明せよ。

【例題 14】　a と b を正の数とする。このとき，$\sqrt{a^a b^b} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}}$ を証明せよ。

【例題 15】　a, b を正の数とする。不等式 $a\log(1+a) + e^b > 1 + ab + b$ を証明せよ。

YAWARAKA 先生のテキスト　③2　微分計算

標準問題

③3-標-1

次の関数を微分せよ。

(1) $y=2^x\sin x$

(2) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

(3) $y=\tan^3 x$

(4) $y=\left(x^2+1\right)e^{-2x}$

(5) $y=\log\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

(6) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

③3-標-2

(1) $y=x^{\log x}$ を微分せよ

(2) $x^2+xy+y^2=4$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x と y の式で表せ。

(3) $y=\tan x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数の導関数を x の式で表せ。

③3-標-3

$x=1-\cos\theta$，$y=\theta-\sin\theta$ のとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を θ で表せ。

③3-標-4

曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ の接線と x 軸，y 軸で囲まれた三角形の面積の最大値を求めよ。

③**3-標-5**　次の関数のグラフをかけ

$$y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x \qquad (0\leq x\leq \pi)$$

③**3-標-6**　次の関数の増減，凹凸を調べ，グラフをかけ。

$$y=xe^{-x}$$

③**3-標-7**　$y=x\left(\log x\right)^2$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ。

③**3-標-8**　次の関数の極値を求め，そのグラフの概形をかけ。

$$y=\frac{\log x}{x^3}$$

③**3-標-9**　次の曲線の概形をかけ。

$$y^2=x^2(x+3)$$

③**3-標-10**　次の曲線の概形をかけ。

$$y^2-2x^2y+x^4+x^2-2=0$$

③**3-標-11**　関数 $f(x)=\left|\dfrac{2x^2+x-1}{x-1}\right|$ について，極値を求め，グラフの概形をかけ。

発展問題

③**3-発-1**　$x>0$ の範囲で定義される関数 $f(x)=\left(\dfrac{e}{x}\right)^{\log x}$ について，$y=f(x)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ。

③**3-発-2**　$y=\sqrt{\dfrac{x(x-3)}{x-4}}$ のグラフを描け。

③**3-発-3**　曲線 $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}$ について，(1)　漸近線の方程式，(2)　y の増減，(3)曲線の凹凸　を調べ，その概形をかけ。

③**3-発-4**　xy 平面上の曲線 $y=\cos\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}x\right)$ と，原点を中心とする半径 r の円との共有点の個数 $N(r)$ を求めよ。

③**3-発-5**　パラメータ表示　$\begin{cases}x=\theta-\sin\theta\\ y=1-\cos\theta\end{cases}$　$(-\pi\leqq\theta\leqq\pi)$ で与えられる曲線(サイクロイド)を C，中心 $(a,1)$，半径 1 の円を B とする。$0<a<\pi$ のとき，C と B の共有点はいくつ存在するか。

③$\boxed{\textbf{3-発-6}}$　座標平面上に，媒介変数θで表された曲線$\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}$　$(0\leqq\theta\leqq2\pi)$がある。
この曲線上の異なる２点P，Qでの接線が互いに直交するとき，PQの中点の軌跡を求めよ。

③$\boxed{\textbf{3-発-7}}$　曲線$y=\dfrac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$上の点$\mathrm{P}\left(x,y\right)$における接線PTと，法線PNとが$x$軸と交わる点をそれぞれT，Nとする。ただし，$x>0$とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　△PTNの面積は，$\dfrac{y^{4}}{2y'}$に等しいことを示せ。

(2)　点$\mathrm{P}\left(x,y\right)$が曲線上を動くとき，△PTNの面積が最小となる点Pの座標と最小値を求めよ。

③$\boxed{\textbf{3-発-8}}$　関数$y=\dfrac{bx+1}{x^{2}+ax}\left(a>0,\,b>0\right)$が２つの極値$-1,\,-4$をとるように$a,\,b$の値を求めよ。

③$\boxed{\textbf{3-発-9}}$　曲線$y=\dfrac{a-x}{x^{2}+1}$が相異なる３つの変曲点をもつとき，３つの変曲点は同一の直線上にあることを示せ。

③$\boxed{\textbf{3-発-10}}$　$0\leq x\leq1$で，不等式$1-kx\leq\dfrac{2}{1+e^{x}}\leq1-lx$が，つねに成り立つような$k$の最小値および$l$の最大値を求めよ。

SoyPaste 数学Ⅲの微分法

SP③3-1 (r4-2)　○

関数 $f(x)=2^x-x\log 2$ について，次の問に答えよ．

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ の $x=1$ における接線の方程式を求めよ．

SP③3-2 (r33-2)　○

$f(x)=x\log|x-1|$ とする．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)$ を求めよ．

(2)　$x>1$ において，導関数 $f'(x)$ の極値を求めよ．

(3)　関数 $f(x)$ の増減，極値，曲線 $y=f(x)$ の凹凸を調べてグラフをかけ．

SP③3-3 (j4-3)　○

曲線 $y=xe^{-x}$ の接線で点 $(1,\ a)$ を通るものがちょうど 2 本存在するような a の値をすべて求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ を用いてもよい．

SP③3-4 (j9-4)　○

区間 $x>0$ における関数 $f(x)=e^{-x}\cos x$ の極大値を，大きい方から順に，

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \cdots,\quad a_n,\quad \cdots$$

とするとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ．

SP③3-5 (j41-3)

２次の多項式 $P(x)=ax^2+bx+c$ が，条件

$$\{xP(\log x)\}'=(\log x)^2\quad (x>0)$$

を満たすような，定数 a，b，c の値を求めよ．

SP③3-6 (j23-1) ※関数範囲入れ忘れ

関数 $y=\dfrac{2^{3x}+4^{x+1}+2^{x+2}}{2^x+2}$ の逆関数を求めよ．

SP③3-7 (s33-2)　○

a を正の定数とする．不等式 $a^x \geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ．

SP③3-8(j38-5)　○

四角形 ABCD は半径 1 の円 O に内接し，AB = AD，CB = CD を満たしている．

(1) 線分 AC は円 O の直径であることを示せ．

辺 CB，CD の中点をそれぞれ M，N とする．四角形 ABCD を線分 AM，AN，MN に沿って折り曲げて点 B，C，D を重ね，四面体 AMNC を作る．CM $= x$ $(0 < x < 1)$ とする．

(2) 四面体 AMNC の体積 V を x を用いて表せ．

(3) 四面体 AMNC に内接する球の表面積 S を x を用いて表し，$0 < x < 1$ における S の最大値を求めよ．

SP③3-9 (s21-3)　◎

点 O を中心とする半径 1 の円周上に AB = AC を満たす異なる 3 点 A，B，C がある．A と O を通る直線が線分 BC と交わる点を P とする．

(1) P は線分 BC の中点であることを示せ．

(2) $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とするとき，三角形 ABC の面積 $S(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi - 0} \frac{S(\theta)}{(\pi - \theta)^3}$ を求めよ．

SP③3-10 (s39-3)　○

t を定数として，xy 平面上の直線 $C_t : y=(x+t)e^t$ を考える．t が $t>0$ の範囲を変化するとき，C_t が通る範囲を求め，その概形を図示せよ．

SP③3-11 (s1-3)　○

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい．

(1) 自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) の 2 つの実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，

$$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}},\quad ne<\beta_n$$

が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ．

SP③4-12 (s39-3)

次の問に答えよ．

(1) $x\geqq 0$ のとき不等式 $1-x\leqq e^{-x}$ を示せ．

(2) n 人 $(n\geqq 3)$ の選手の中からくじ引きで 2 人の選手を選び，1 回の試合を行う．

このようにして試合を n 回行うとき，同じ選手同士の試合が一度も起こらない確率は $\dfrac{1}{e}$ より小さいことを証明せよ．ただし，e は自然対数の底である．