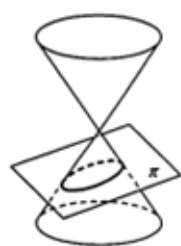
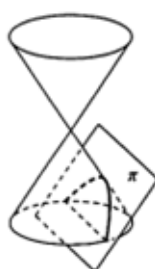


二次曲線

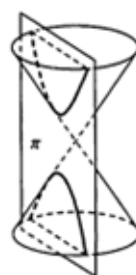
別名 円錐曲線～円錐を図のように切断して現れる



(楕円)



(放物線)



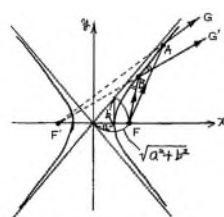
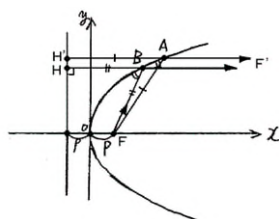
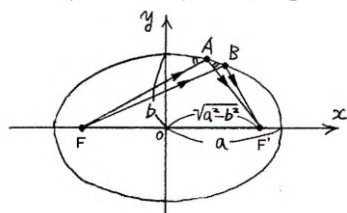
(双曲線)

離心率 定点 F と定直線 l に対して $\frac{FP}{HP} = e$ (一定) を満たす点 P の軌跡は二次曲線になる。

このとき、 e を離心率という。

二次曲線・チェックリスト

- 二次曲線の接線公式 2乗の片方に接点代入, 2乗がなければ係数半分にして片方に接点代入
- だ円と直線, だ円と面積 \Rightarrow 円だ円変換
- だ円の最大最小 \Rightarrow だ円のパラメータ表示
- 双曲線 = 漸近線までの距離の積が一定
- 光学的性質
 - ①楕円: 点光源の光を一点に集める
 - ②放物線: 点光源の光を平行光線にする
 - ③双曲線: 点光源の虚像を作る



- だ円の準円 : だ円外から直交二接線が引ける点の軌跡は円となる。

(例) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の準円は $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

極座標

(注2) $r < 0$ の場合を考えることもある。このとき、 (r, θ) と $(-r, \theta + \pi)$ は同じ点を表す極座標である。■

② 2次曲線の極方程式

$F(0, 0)$ を極, $l: x = k$ ($k > 0$) として, 離心率 e ($e > 0$) の2次曲線の極方程式を求める。

$r < 0$ の場合も込めて考えると

$$FP = |r|, \quad HP = |k - x| = |k - r \cos \theta|$$

であるから

$$FP = e \cdot HP \iff |r| = e|k - r \cos \theta|$$

$$\iff r = \pm e(k - r \cos \theta)$$

$$\iff r = \frac{ek}{1 + e \cos \theta} \quad (\dots \textcircled{1}), \quad r = \frac{-ek}{1 - e \cos \theta} \quad (\dots \textcircled{2}).$$

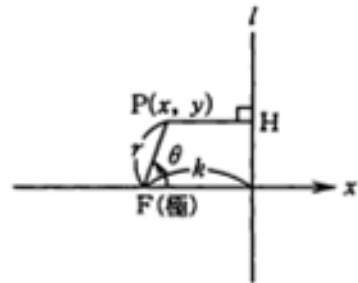
極座標においては、 (r, θ) と $(-r, \theta + \pi)$ は同じ点を表すから、①において θ を $\theta + \pi$, r を $-r$ と置き換えると

$$-r = \frac{ek}{1 + e \cos(\theta + \pi)} = \frac{ek}{1 - e \cos \theta} = -\frac{-ek}{1 - e \cos \theta}.$$

これは②と同値になり、その結果、①, ②それぞれの表す図形は全体として一致する。①を代表にとれば、極方程式は

$$r = \frac{ek}{1 + e \cos \theta}.$$

楕円では $0 < e < 1$, 放物線では $e = 1$, 双曲線では $e > 1$ となる。



極座標・チェックリスト

- 放物線の焦点を極とする極座標では、「定義の利用」が有効

談話室マロニエ 数学 QUIZ 二次曲線

A 問題

放物線の定義 ある点 F と直線 l からの距離が等しい点の集合である。 F を , l を という。

楕円の定義 ある 2 定点からの距離の和が一定値である点の集合である。

双曲線の定義 ある 2 定点からの距離の差が一定値である点の集合である。

放物線 $y^2 = 4px$ の の座標は , の方程式は である。また、頂点は である。

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) の軸との交点の座標をすべて求めると、 である。

長軸の長さは , 短軸の長さは であり、焦点の座標は である。

また、中心の座標は である。

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) の軸との交点の座標をすべて求めると、 である。

漸近線の方程式は であり、焦点の座標は である。

また、中心の座標は である。

放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 (x_0, y_0) における接線は、 である。

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_0, y_0) における接線は、 である。

双曲線の接線公式は、楕円と同様。

B 問題

楕円のパラメータ表示 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点は、変数 θ を用いて、

$x = \boxed{\text{チ}}$, $y = \boxed{\text{ツ}}$ と表せる。

C 問題

放物線外の点 P から引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡の方程式は $\boxed{\text{テ}}$ であり、
 $\boxed{\text{ト}}$ と呼ばれる。

楕円外の点 P から引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡の方程式は $\boxed{\text{ナ}}$ であり、
 $\boxed{\text{ニ}}$ と呼ばれる。

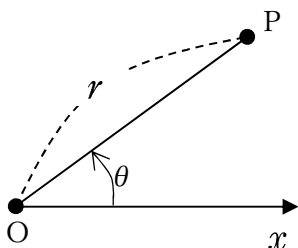
談話室マロニエ 数学 QUIZ 極座標

A 問題

極座標

点 P の極座標を $P(r, \theta)$ と表す

点 O は極,
 半直線 Ox は始線,
 θ は偏角という。



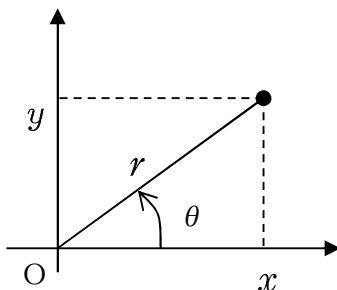
(注) $r \geq 0$ とすることが多い。 $r=0$ のとき θ は不定である。

極座標と直角座標の関係

点 P の極座標を (r, θ) ,
 直角座標を (x, y) とすると、

(1) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \theta = \frac{y}{x}$



極方程式

曲線上の点 P の極座標 (r, θ) について、

r と θ の関係式をその曲線の極方程式という。

極方程式はできるだけ $r = f(\theta)$ の形にすることが望ましい。

【補充問題】 YAWARAKA 先生のテキストより 二次曲線篇

標準問題

③4-標-1

- (1) $y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ で表される放物線の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。
- (2) 焦点の座標が $(-1, 3)$, $(5, 3)$ で、長軸の長さが 10 である楕円の方程式を求めよ。
- (3) 点 $(2, 0)$ を 1 つの焦点とし、2 直線 $y - x - 1 = 0$ と $y + x + 1 = 0$ を漸近線とする双曲線の方程式を求めよ。

③4-標-2

放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) の焦点 F を通る弦の両端 PQ から準線へ下した垂線の足をそれぞれ R, S とする。

- (1) RF は SF に垂直であることを示せ。
- (2) 線分 RS の中点を M とし、2 線分 PR, QS の長さをそれぞれ a, b とするとき、線分 MF の長さを a, b で表せ。

③4-標-3

座標平面上にある 3 点 A, B, C があり、B の座標は $(-5, 0)$, C の座標は $(5, 0)$, 線分 AB の長さは $3\sqrt{10}$, 線分 AC の長さは $\sqrt{10}$ である。

- (1) 焦点が B, C で、点 A を通るだ円の方程式を求めよ。
- (2) 焦点が B, C で、点 A を通る双曲線の方程式を求めよ。
- (3) 点 A において (1) のだ円と (2) の双曲線にそれぞれ接線を引くと、この 2 本の接線は直交することを証明せよ。

③4-標-4

点 $A(-a, 0)$ を中心とする半径 r_0 の円 C_0 の内部に、点 $B(a, 0)$ を中心とする半径 r_1 の円 C_1 があり、 $a \neq 0$ とする。円 C_0 に内接し、円 C_1 に外接する円 C の中心 P の軌跡を求めよ。

③4-標-5

座標平面上に、中心 $A(-2, 0)$ 、半径 1 の円 C_1 と中心 $B(4, 0)$ 、半径 4 の円 C_2 がある。 C_1 および C_2 に外接する円の中心 P の軌跡を求めよ。

③4-標-6

だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) の第 1 象限の部分の任意の 1 点を P とする。

P におけるだ円の接線と x 軸、 y 軸との交点をそれぞれ Q, R 、原点を O とする。

- (1) $\triangle OQR$ の面積の最小値を求めよ。
- (2) 線分 QR の長さの最小値を求めよ。

③4-標-7

だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の互いに垂直な接線の交点 P の軌跡 L を求めよ。

③4-標-8

(1) 円 $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ を極方程式で表せ

(2) 極方程式 $r^2 - 4r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -3$ を直交座標の方程式で表せ。

③4-標-9

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) の周上を 2 点 P, Q が $\angle POQ = 90^\circ$ を満たすように動いている。ただし, O は原点とする。このとき, $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$ が一定であることを証明せよ。

③4-標-10

放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) について,

(1) 焦点 F を極, x 軸の正の部分を通る直線を始線とする極方程式を求めよ。

(2) 焦点 F で直交する弦を PQ, RS とすれば, $\frac{1}{FP \cdot FQ} + \frac{1}{FR \cdot FS}$ は一定であることを証明せよ。

発展問題

③4-発-1

座標平面上に定点 $A(0, a)$ ($a > 0$) と動点 P がある。 P より x 軸に下ろした垂線の足を H とする。定数 $k > 0$ に対して、 $PA = kPH$ が成立するならば、点 P はある 2 次曲線上にある。

- (1) 2 次曲線が放物線となる k の値を求めよ。
- (2) 2 次曲線が楕円となる k の値と、楕円の中心を求めよ。
- (3) 2 次曲線が双曲線となる k の値と焦点の座標を求めよ。

③4-発-2

放物線 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$) の弦 PQ の両端と頂点 O とを結ぶ線分 PO , QO が直交するならば、直線 PQ は定点を通ることを示し、その定点 A の座標を求めよ。ただし、 $P \neq O$, $Q \neq O$ とする。

③4-発-3

放物線 $y^2 = 4px$ 上の頂点以外の点を P とし、 P における接線 g が x 軸と交わる点を Q , 放物線の焦点を F とする。また、 P を通り x 軸に平行な直線上の 1 点 R を放物線内にとる。このとき、 PR と接線 g のなす角は $\angle FPQ$ に等しいことを証明せよ。

③4-発-4

- (1) 直交座標において、点 $A(\sqrt{3}, 0)$ と準線 $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ からの距離の比が $\sqrt{3}:2$ である点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。
- (2) (1)における A を極、 x 軸の正の部分と半直線 AX のなす角 θ を偏角とする極座標を定める。このとき、 P の軌跡を $r = f(\theta)$ の形の極方程式で求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$, $r > 0$ とする。
- (3) A を通る任意の直線と(1)で求めた曲線との交点を R, Q とする。このとき、 $\frac{1}{RA} + \frac{1}{QA}$ は一定であることを示せ。

③4-発-5

楕円 $Ax^2 + By^2 = 1$ (A, B は正の定数) の外部の点 $P(x_0, y_0)$ から、この楕円にひいた接線の接点を Q, R とするとき、直線 QR は $Ax_0x + By_0y = 1$ という方程式で表されることを示せ。

③4-発-6

楕円 $Ax^2 + By^2 = 1$ (A, B は正の定数) 上の異なる 2 点 P, Q における接線の交点 R と原点 O を結ぶ直線は、弦 PQ の中点 M を通ることを示せ。

③4-発-7

だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の 2 つの焦点を F, F' とし、だ円上の動点を P とする。ただし、 $a > b > 0$ である。ベクトル $\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{PF'}$ の内積 $\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{PF'}$ の値の範囲を求めよ。

③4-発-8

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ がある。ただし、 $a > 0, b > 0$ とする。

- (1) 2 つの漸近線のなす角を θ とするとき、 $\sin\theta$ を求めよ。
- (2) 双曲線上の点 $P(p, q)$ ($p > 0, q > 0$ とする) を通り、2 つの漸近線に平行な直線を引き、それぞれが漸近線と交わる点を Q, R とする。このとき、平行四辺形 $OQPR$ (O は原点) の面積を求めよ。



SoyPaste 二次曲線

SP③5-1

Oを原点とする座標平面上に、2点 $A(\cos\theta, 0)$, $B(0, \sin\theta)$ をとる。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) 線分 OA, OB の長さの和の最大値とそのときの θ の値を求めよ。
- (2) 三角形 OAB の面積の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

SP③5-2 ○