和尚の数学♪過去問めぐり・埼玉医大（２）

【１】2008 埼玉医科大学

△ABC の各頂点 A，B，C から対辺に引いた垂線の長さがそれぞれ 2，3，4 であるとき，

$$\cos\angle \mathrm{ACB}=\frac{\boxed{(1)(2)}}{\boxed{(3)(4)}}$$

である。

【２】2007 埼玉医科大学

方程式

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)(\sqrt{2}+1)^x-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}-1)^x=\sqrt{2}-1$$

の解は $x=\boxed{10}$ である。

【３】2006 埼玉医科大学

問Ａ　ベクトル(0，0，1)，(4，0，3)，(2，2，1) のいずれとも等しい角をなすベクトルがある。この角を θ とすると $|\cos\theta|=\dfrac{\sqrt{\boxed{(1)}}}{\boxed{(2)}}$ である。

問Ｂ　$a^2<b<a<1$ のとき，

$$0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \log_a b,\ \log_b a,\ \log_a\frac{a}{b},\ \log_b\frac{b}{a}$$

を大きさの順に並べると，$\log_b\dfrac{b}{a}$ は $\boxed{(3)}$ 番目に小さく，1 は $\boxed{(4)}$ 番目に小さい。

問Ｃ　1 から 8 までの 8 個の異なる自然数を 2 つのグループに分け，各々のグループに属する数の総和をそれぞれ S_1，S_2 とする。このとき，積 S_1S_2 の最大値は $\boxed{(5)(6)(7)}$ である。

問Ｄ　x の 2 次方程式 $x^2+4kx-5k+1=0$ は異符号の整数解をもつ。ここで k は整数である。このとき $k=\boxed{(8)}$ であり，2 次方程式の解は $-\boxed{(9)}$ と $\boxed{(10)}$ である。

【４】2005 埼玉医科大学

問A　$x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$のとき，

$$x^4-12x^3+54x^2-108x+20=\boxed{\quad(1)\quad}$$

である。

問B　$\tan\theta=2$のとき，

$$\frac{6\sin 2\theta+5\cos 2\theta}{5\sin 2\theta+4\cos 2\theta}=\frac{\boxed{\quad(3)\quad}}{\boxed{\quad(4)\quad}}$$

である。

【５】2001 埼玉医科大学 3/4, 1次試験, 地方 医学部

(1)　3 時と 4 時の間で，短針と長針のなす角が 100° に最も近くなるのは$\boxed{\quad ア\quad}$分のときである(整数値を記入すること)。

(2)　1 辺の長さが 1 の正四面体の体積は$\boxed{\quad イ\quad}$である。

(3)　立方体の積み木を縦横51×51個敷きつめ，その上に縦横49×49個の積み木を重ねる。重ねる積み木が 1 個になるまでこの操作を繰り返してピラミッドの模型を作るとき，必要な積み木の数は$\boxed{\quad ウ\quad}$個である。

(4)　$|\vec{a}|=\sqrt{10}$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$，$|\vec{a}+\vec{b}|=5$とする。いまtを任意の実数とすると，$|\vec{a}+t\vec{b}|$の最小値は$\boxed{\quad エ\quad}$であり，そのときのtの値は$\boxed{\quad オ\quad}$である。

(5)　x，y，z，u，v の 5 個の文字からなる，係数が 1 の 3 次の単項式は$\boxed{\quad カ\quad}$種類ある。

【１】

問2　$\triangle$ABC の各頂点に向き合う辺の長さを a, b, c, 面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}a\cdot 2=\frac{1}{2}b\cdot 3=\frac{1}{2}c\cdot 4$$

よって　$a=S$, $b=\frac{2}{3}S$, $c=\frac{1}{2}S$

これらより　$a=6k$, $b=4k$, $c=3k$ (k は実数)

とおけるから，余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{(6k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\cdot 6k\cdot 4k}=\frac{43}{48}\quad (\leftarrow ④\sim⑦)$$

【２】

(3) 与式を変形して

$$(\sqrt{2}-1)^2(\sqrt{2}+1)^x-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^x$$
$$=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$
$$(\sqrt{2}+1)^x-(\sqrt{2}+1)^3(\sqrt{2}-1)^x=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$$

$(\sqrt{2}+1)^x=A$ (>0) とおくと，$(\sqrt{2}-1)^x=A^{-1}$ だから

$$A-(\sqrt{2}+1)^3A^{-1}=2+\sqrt{2}$$
$$\therefore\ A^2-(2+\sqrt{2})A-(\sqrt{2}+1)^3=0$$
$$\{A-(\sqrt{2}+1)^2\}\{A+(\sqrt{2}+1)\}=0$$
$$\therefore\ A=(\sqrt{2}+1)^x=(\sqrt{2}+1)^2\ (>0)$$

よって　$x=2$

【３】

❶ 〔答〕 ① 6 ② 3 ③ 3 ④ 6
⑤⑥⑦ 324 ⑧ 2 ⑨ 9 ⑩ 1

解説 **(1)** 原点をO，A(0, 0, 1)，B(4, 0, 3)，C(2, 2, 1) として，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のいずれにも等しい角 θ をなすベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ とおく．
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3$ だから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{z}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\quad\cdots\cdots\cdots①$$
$$=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{4x+3z}{5|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\quad\cdots\cdots\cdots②$$
$$=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{2x+2y+z}{3|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\quad\cdots\cdots\cdots③$$

①，②から　$5z=4x+3z$　$z=2x$　………④

①，③から　$3z=2x+2y+z$

整理して　$z=x+y$

ここに④を代入して　$z=2y$　………⑤

④，⑤を①に代入すると

$$|\cos\theta|=\frac{|z|}{\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2+z^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2) $a^2<b<a<1$

だから底を a とする辺々の対数をとると

$$\log_a a^2>\log_a b>\log_a a>\log_a 1$$

整理して　$1<\log_a b<2$　………①

この結果を用いて

$$\frac{1}{2}<\log_b a=\frac{1}{\log_a b}<1\quad\cdots\cdots\cdots②$$

また　$\log_a\frac{a}{b}=\log_a a-\log_a b=1-\log_a b$

よって　$-1<\log_a\frac{a}{b}<0$　………③

さらに　$\log_b\frac{b}{a}=\log_b b-\log_b a=1-\log_b a$

よって　$0<\log_b\frac{b}{a}<\frac{1}{2}$　………④

①，②，③，④から

$$\log_a\frac{a}{b}<0<\log_b\frac{b}{a}<\frac{1}{2}<\log_b a<1<\log_a b$$

したがって，７つの数のうち $\log_b\frac{b}{a}$ は３番目に小さく，１は６番目に小さい．

(3) n を自然数とする．いくつかの自然数の和が $2n$ のとき，自然数を２つのグループに分ける．２つのグループの和がともに n のとき，この２つのグループの積 n^2 が最大となる．それは k を０でない整数として

$$n^2>(n+k)(n-k)=n^2-k^2$$

が成り立つからである．この問題では

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

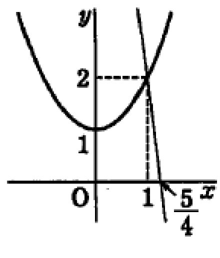
だから

$$S_1=1+2+7+8=18,\ S_2=3+4+5+6=18$$

とおくことによって，積 S_1S_2 の最大値は

$$18\times18=324$$

(4) $x^2+4kx-5k+1=0$
………①



から　$x^2+1=k(5-4x)$

①が異符号の整数解をもつとき，２つのグラフ $y=x^2+1$ と $y=k(5-4x)$ が x 座標が正の部分と負の部分で共有点をもって x 座標が整数になるときである．それは直線のグラフが点 (1, 2) を通るときに限られるから，$x=1$ を①に代入して

$$1+4k-5k+1=0\ \text{から}\ k=2$$

この値を①に代入して

$$x^2+8x-9=0\quad (x+9)(x-1)=0$$

から，２次方程式の解は　$x=-9,\ 1$

【4】

解説 (1) $x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

だから

$$(x-3)^2=(-2\sqrt{2})^2,\ x^2-6x+1=0$$

$$\therefore\ x^4-12x^3+54x^2-108x+20$$
$$=(x^2-6x+1)(x^2-6x+17)+3=3$$

(3) $\tan\theta=2$ のとき

$$\frac{6\sin 2\theta+5\cos 2\theta}{5\sin 2\theta+4\cos 2\theta}$$
$$=\frac{12\sin\theta\cos\theta+5(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{10\sin\theta\cos\theta+4(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}$$
$$=\frac{12\tan\theta+5(1-\tan^2\theta)}{10\tan\theta+4(1-\tan^2\theta)}=\frac{12\cdot 2+5(1-2^2)}{10\cdot 2+4(1-2^2)}=\frac{9}{8}$$

別解 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\dfrac{4}{3}$

を 与式$=\dfrac{6\tan 2\theta+5}{5\tan 2\theta+4}$ に代入する方法もある.

【5】

❶ 答 ア 35 イ $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ ウ 23426 エ $\sqrt{5}$

オ -1 カ 35

解説 (1) 3時と4時の間で，短針と長針のなす角が100° になる時刻を3時 x 分とすると，次の方程式が成り立つ.

$$6x=90+\frac{1}{2}x+100 \iff \frac{11}{2}x=190 \iff x=34\frac{6}{11}$$

これに最も近い整数は 35

(2) 1辺の長さが1の正四面体の底面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，高さは $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ であるから，体積は $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

(3) $51^2+49^2+\cdots\cdots+1^2=\sum_{k=1}^{26}(2k-1)^2$

$$=4\sum_{k=1}^{26}k^2-4\sum_{k=1}^{26}k+26$$
$$=4\times\frac{26\times 27\times 53}{6}-4\times\frac{26\times 27}{2}+26=23426$$

(4) $|\vec{a}|=\sqrt{10}$，$|\vec{b}|=\sqrt{5}$，$|\vec{a}+\vec{b}|=5$ のとき，

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=10+2\vec{a}\cdot\vec{b}+5=25$$

となるから $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$，このとき

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=5t^2+10t+10$$
$$=5(t+1)^2+5$$

は $t=-1$ のとき最小値5をとる．よって $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値は $\sqrt{5}$，そのときの t の値は -1

(5) ${}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$