場合の数・診断テスト

【例題 01】　種類の異なるＴシャツ５枚，Ｇパン３本，服装の選び方は何通りあるか。

【例題 02】　種類の異なるＴシャツ５枚，Ｇパン３本，スカート４枚，服装の選び方は何通りあるか。
　ただし，Ｇパンとスカートの重ね着は行わないものとする。

【例題 03】　C,O,M,P,A,N,Y の７文字を一列に並べるとき，Ｃ とＹ が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

【例題 04】　S,C,H,O,O,L の６文字を一列に並べる並べ方は何通りあるか。

【例題 05】　両親と，子供４人で円形に並ぶ。両親が隣り合う並び方は何通りあるか。

【例題 06】　異なる６個の宝石をつないでネックレスを作るとき，作り方は何通りあるか。

【例題 07】(1) a,b,c の３文字から，重複を許して５文字並べて単語を作るとき，作り方は何通りあるか。
(2)A，B，C の３つの部屋に，５人を分ける分け方は何通りあるか。ただし，空き部屋があっても良いものとする。

【例題 08】(1) 10 個のりんごをＡ君，Ｂ君，Ｃ君の３人に分けるとき，分け方は何通りあるか。ただし，１つももらえない者がいても良いものとする。
(2) $x+y+z=10$ を満たす０以上の整数 x, y, z の組 (x, y, z) の総数は何組あるか。

【例題 09】
　異なる９冊の本を３冊ずつ３組に分ける分け方は何通りあるか。

【例題 10】
(1) A，B，C の３つの部屋に，５人を分ける分け方は何通りあるか。
(2) A，B，C の３つの部屋に，n 人を分ける分け方は何通りあるか。
　ただし，(1)(2)ともに，空き部屋があってはならないものとする。

【例題 11】
　赤球４個，白球２個，黒球１個をつないでブレスレットを作る。作り方は何通りあるか。

診断テスト（発展篇）

【例題 12】

n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし，1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。以下に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めよ。

(1) 1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。

(2) 互いに区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合。

(3) 1 から n までの異なる番号のついた n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合

(4) n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別がつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合。

（東京大）

解答▶ **(1)** 各ボールについて 3 通りの入れ方があるから，求める総数は

3^n 通り　答

(2) A，B，C に入れるボールの個数をそれぞれ a，b，c とすると

$$a+b+c=n,\ a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0 \qquad \cdots\cdots①$$

求める分け方の総数は，①の整数解 $(a,\ b,\ c)$ の個数に等しいから

$$ {}_3\mathrm{H}_n = {}_{n+2}\mathrm{C}_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \text{ 通り}$$ 答

(3) (i) 空箱がないとき，p 通り

(ii) 空箱が 1 個のとき，q 通り

であるとする．また

(iii) 空箱が 2 個のとき，1 通り

である．

(i)，(ii) の各々は箱を区別した場合の 6 通りの分け方に対応し，(iii) は箱を区別した場合の 3 通りの分け方に対応する．

よって，(1) より

$$6(p+q)+3=3^n$$

$$\therefore\quad p+q=\frac{3^{n-1}-1}{2}$$

ゆえに，求める総数は

$$p+q+1=\frac{3^{n-1}+1}{2} \text{ 通り}$$ 答

(4) (i) 3 つの箱に入ったボールの個数が互いに異なるとき

k 通り

であるとする．

(ii) 2 つの箱に入ったボールの個数だけが等しいとき，ボールの個数の組合せは

$$\begin{cases} (0,\ 0,\ 6m) \\ (1,\ 1,\ 6m-2) \\ \quad\vdots \\ (3m,\ 3m,\ 0) \end{cases}$$

から，$(2m,\ 2m,\ 2m)$ を除いたものだから

$3m$ 通り

(iii) 3 つの箱に入ったボールの個数が等しいとき

1 通り

(i) の各々は箱を区別した場合の 6 通りの分け方に対応し，(ii) の各々は箱を区別した場合の 3 通りの分け方に対応する．また，(iii) の場合は箱を区別しても同じ 1 通りである．

よって，(2) より

$$6k+3\cdot 3m+1=\frac{(6m+2)(6m+1)}{2}$$

$$=18m^2+9m+1$$

$$\therefore\quad k=3m^2$$

ゆえに，求める総数は

$$k+3m+1=3m^2+3m+1 \text{ 通り}$$ 答

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより

標準問題

⑫5-標-1

JAPANESE の 8 文字から 7 文字取り出して一列に並べる方法は何通りあるか。

(2)　8 文字から A または E を除く場合は $\frac{7!}{2!}$，そのほかの文字を除く場合は $\frac{7!}{2!2!}$ であるから

$$\frac{7!}{2!}\times 2+\frac{7!}{2!2!}\times 4=2\times 7!=10080 \text{ 通り}$$ ……(答)

⑫5-標-2

両親と 4 人の子供（息子 2 人，娘 2 人）が円形に座る
（1）両親が隣り合う座り方は何通りあるか。
（2）男性と女性が交互に座る座り方は何通りあるか。

（１）48 通り　（２）12 通り

⑫5-標-3

12 冊の異なる本を次のように分ける方法は何通りあるか。
（1）5 冊，4 冊，3 冊の 3 組に分ける。
（2）4 冊ずつ 3 組に分ける。
（3）8 冊，2 冊，2 冊の 3 組に分ける

組分け問題

（１）${}_{12}C_5\times{}_7C_4=27720$（通り）　（２）$\frac{34650}{3!}=5775$（通り）　（３）$\frac{{}_{12}C_8\times{}_4C_2}{2!}=1485$（通り）

⑫5-標-4

（1）$a, b, c,$ d を負でない整数とするとき，$a+b+c+d=10$ を満たす解は何通りあるか。
（2）a, b, c, d を自然数とするとき，$a+b+c+d=10$ を満たす解は何通りあるか。

（１）10 個のリンゴを 4 人に分ける＝3 か所で仕切ると考えて，$\frac{(10+3)!}{10!\times 3!}=286$ 通り。

（２）4 人に 1 つずつ分けておき，残り 6 個のリンゴを 3 か所で仕切ると考えて，$\frac{(6+3)!}{6!\times 3!}=84$ 通り

⑫**5-標-5**

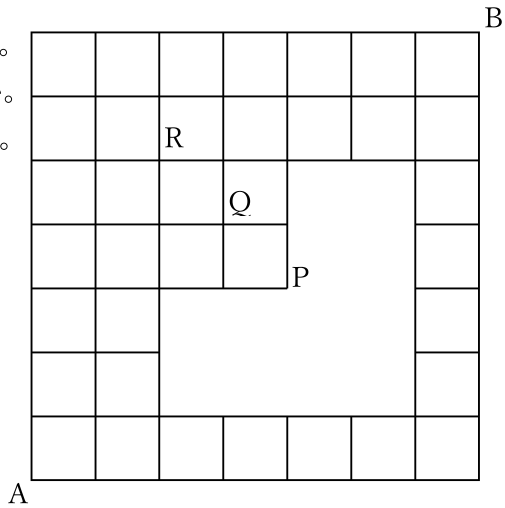
ガラスでできた球で，赤色のものが 6 個，青色のものが 2 個，透明なものが 1 個ある。球には，中心を通って穴が開いているとする。これらの玉に糸を通して首輪を作る方法は何通りあるか。

16 通り

⑫**5-標-6**

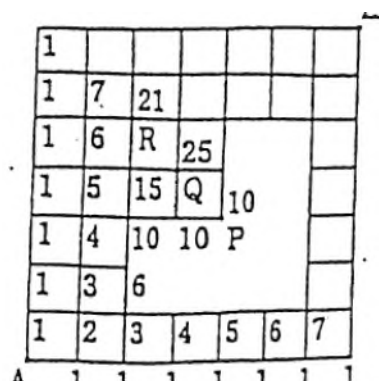
図のような道をもつ町がある。この町の西南端 A から東北端 B に至る最短路について，次の問いに答えよ。

（1）途中で地点 P を通るものは何通りあるか。
（2）途中で地点 Q を通るものは何通りあるか。
（3）途中で地点 R を通るものは何通りあるか。
（4）全部で何通りあるか。



（1）100 通り　（2）625 通り　（3）441 通り　（4）1266 通り

《参考》



発展問題

⑫5-発-1

MATUTAKE の 8 文字を全部使ってできる順列をアルファベット順に辞書式に配列するとき，次の問いに答えよ。

(1)　1990 番目の文字列は何か

(2)　UME という 3 文字が連続して並ぶ文字列が最初に現れるのは何番目か。

解答　(1)　AA, AE, AK, AM で始まる列はどれも $\frac{6!}{2!}=360$ 個　ある。この合計が　1440 個。

← ATで始まる列は　$6!=720$個

ATA, ATE, ATK, ATM で始まる列はどれも $5!=120$ 個ある。ここまでで　$1440+120\times4=1920$ 個

← AT が使われたら残りの文字はどれも異なる。

ATTA, ATTE で始まる列は，$4!=24$個ある。

ATTKA, ATTKE, ATTKM で始まる列は，$3!=6$ 個ある。ここまでで，$1920+24\times2+6\times3=1986$ 個ある。

← ATTKU○○○までわかった。

そして，

ATTKUAEM, ATTKUAME, ATTKUEAM

と続いて，1990 番目は，　ATTKUEMA　……(答)

(2)　AAKTTUME が何番目に配列されるかを調べる。

← K, M, T, T, U の順列。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{AAE} & 60\text{ 個}\\ \text{AAKE} & 12\text{ 個}\\ \text{AAKM} & 12\text{ 個}\\ \text{AAKTE} & 6\text{ 個}\\ \text{AAKTM} & 6\text{ 個}\\ \text{AAKTTE} & 2\text{ 個}\\ \text{AAKTTM} & 2\text{ 個}\end{array}\right\}\text{合計 100 個}$$

← AAKTTUEM が101番目である。

よって，102 番目である。　……(答)

⑫ $\boxed{\textbf{5-発-2}}$

7 個の文字 T,O,K,Y,O,T,O を 1 列に並べる並べ方について，次の問いに答えよ。

(1)　T が 2 つ隣り合い，O が 3 つ隣り合う並べ方は何通りあるか。

(2)　O は 3 つ隣り合うが，2 つの T は隣り合わない並べ方は何通りあるか。

(3)　2 つの T は隣り合うが，3 つの O はどの 2 つも隣り合わない並べ方は何通りあるか。

(4)　同じ文字が全く隣り合わない並べ方は何通りあるか。

解説　T 2 つを○，O 3 つを□で表すことにする．

(1)　T が 2 つ隣り合い，O が 3 つ隣り合う並べ方の数は，○，□，K，Y の並べ方の数に等しいから

$$4!=24$$ 通り

(2)　O は 3 つ隣り合うが，2 つの T は隣り合わないように並べるには，まず，□，K，Y を並べて，それらの間および両端の 4 カ所から 2 カ所を選んで T をおけばよい．

よって，求める並べ方の数は　$3!\times{}_4C_2=36$ 通り

(3)　2 つの T は隣り合うが，3 つの O はどの 2 つも隣り合わないように並べるには，まず，○，K，Y を並べて，それらの間および両端の 4 カ所から 3 カ所を選んで O をおけばよい．

よって，求める並べ方の数は　$3!\times{}_4C_3=24$ 通り

(4)　同じ文字が全く隣り合わない並べ方の数を求めるには，3 つの O がどの 2 つも隣り合わない（2 つの T は隣り合ってもよい）並べ方の数を求めて，この数から(3)の結果を引けばよい．

3 つの O がどの 2 つも隣り合わないためには，まず，T，T，K，Y を並べて，それらの間および両端の 5 カ所から 3 カ所を選んで O をおけばよいので，

$$\frac{4!}{2!}\times{}_5C_3=120$$ 通り

よって，求める並べ方の数は

$$120-24=96$$ 通り

⑫ $\boxed{\textbf{5-発-3}}$

$x+y+z+w\leq 12$ を満たす非負整数の組 (x,y,z,w) は何組あるか。

286 通り

⑫5-発-4　2011 獨協医科大学

1 から n までの通し番号がついた n 個の箱と，1 から n までの通し番号がついた n 個の球がある。n 個の箱に 1 つずつ球を入れる方法の数は $n!$ 通りだけあるが，このうち箱の番号と球の番号とがすべて異なるような入れ方の総数を a_n とする。たとえば，$a_1=0$，$a_2=1$ である。(1)　$a_3=\boxed{ア}$，$a_4=\boxed{イ}$ である。(2)　a_{n+1} について考える。$n+1$ 番の球を 1 番の箱に入れる場合は，1 番の球が $n+1$ 番の箱に入る場合と入らない場合を考えれば $a_{n-\boxed{ウ}}+a_n$ 通りだけあることがわかる。$n+1$ 番の球が他の箱に入る場合も同様なので，$a_{n+1}=n(a_{n-\boxed{ウ}}+a_n)$　$(n \geqq \boxed{エ})$ となる。(3)　$n \geqq \boxed{エ}$ のとき，$a_n-na_{n-\boxed{ウ}}=(\boxed{オカ})^n$ である。(4)　$n \geqq \boxed{エ}$ のとき，$\dfrac{a_n}{n!}=\displaystyle\sum_{k=\boxed{キ}}^{n}\dfrac{(\boxed{クケ})^k}{k!}$ である。【解答】ア．　2　イ．　9　ウ．　1　エ．　2　　オカ．　-1　キ．2　クケ．　-1

<完全順列の場合の数>

$n=1$ のときは箱の番号と球の番号が一致するから

$a_1=0$

$n=2$ のときは，箱の番号と球の番号がすべて異なるのは，箱 1 に球 2，箱 2 に球 1 の 1 通りだけだから

$a_2=1$

(1)$n=3$ のとき

箱の番号	1	2	3
球の番号	2	3	1
	3	1	2

の 2 通りあるから　$a_3=2$　(→ア)

$n=4$ のとき

箱の番号	1	2	3	4
球の番号	2	1	4	3
	2	3	4	1
	2	4	1	3
	3	1	4	2
	3	4	1	2
	3	4	2	1
	4	1	2	3
	4	3	1	2
	4	3	2	1

の 9 通りあるから　$a_4=9$　(→イ)

(2)a_{n+1} について，球 $n+1$ を箱 1 に入れる場合を考える。

まず，球 1 が箱 $n+1$ に入る場合は，箱 1 と箱 $n+1$ を除く残り $n-1$ 個の箱の番号と球の番号がすべて異なるように入れればよいから，入れ方は a_{n-1} 通りある。

箱の番号	1	2　3　…　n	$n+1$
球の番号	$n+1$	$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-1\text{個}}$	1

次に，球 1 が箱 $n+1$ に入らない場合は，箱 $n+1$ を箱 1 とみなし，n 個の箱と番号がすべて異なるように入れる入れ方と一致するから，その入れ方は a_n 通りある。

箱の番号	1　2　3　…　n　$n+1$
球の番号	$n+1$　$\underbrace{\qquad\qquad}_{n\text{個}}$　1 以外

よって，球 $n+1$ を箱 1 に入れる場合は

$$a_{n-1}+a_n\text{ 通り}\quad(\to ウ)$$

だけあることがわかる。

球 $n+1$ が箱 2 ～ n に入る場合も同様に $a_{n-1}+a_n$ 通りあるから

$$a_{n+1}=n(a_{n-1}+a_n)\quad(n\geqq 2)\quad(\to エ)$$

$a_{n+1}=n(a_{n-1}+a_n)$ で $n=2$，3 とおくと

$$a_3=2(a_1+a_2)=2(0+1)=2$$

$$a_4=3(a_2+a_3)=3(1+2)=9$$

となり，確かに(1)の結果と一致する。

(3) $n\geqq 2$ のとき，$a_{n+1}=n(a_{n-1}+a_n)$ を変形すると

$$a_{n+1}-(n+1)a_n=-(a_n-na_{n-1})$$

となるので，数列 $\{a_n-na_{n-1}\}$ は公比 -1 の等比数列をなす。よって

$$\begin{aligned}a_n-na_{n-1}&=(a_2-2a_1)\cdot(-1)^{n-2}\\&=(1-2\times 0)\cdot(-1)^{n-2}\\&=(-1)^{n-2}=(-1)^n\quad(\to オカ)\end{aligned}$$

(4) $n\geqq 2$ のとき，$a_n-na_{n-1}=(-1)^n$ の両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}$$

上式において n を 2，3，…，n とおいて辺々加える。

$$\begin{array}{rl}&\dfrac{a_2}{2!}-\dfrac{a_1}{1!}=\dfrac{(-1)^2}{2!}\\&\dfrac{a_3}{3!}-\dfrac{a_2}{2!}=\dfrac{(-1)^3}{3!}\\&\dfrac{a_4}{4!}-\dfrac{a_3}{3!}=\dfrac{(-1)^4}{4!}\\&\qquad\vdots\\+)&\dfrac{a_n}{n!}-\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\dfrac{(-1)^n}{n!}\\\hline&\dfrac{a_n}{n!}-\dfrac{a_1}{1!}=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}\end{array}$$

$a_1=0$ を用いて

$$\frac{a_n}{n!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\quad(\to キ～ケ)$$

⑫5-発-5　2012 東海大学 2/2

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。$a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$n\geqq 3$のとき，a_nを$a_n=\dfrac{c_n}{b_n}$と表す。ここで，b_n，c_nは互いに素な自然数である。$n=1$のとき，$b_1=1$，$c_1=0$，$n=2$のとき，$b_2=1$，$c_2=1$と定める。

(1)　b_{n+1}，c_{n+1}をb_n，c_nで表すと$b_{n+1}=\boxed{\text{ア}}$，$c_{n+1}=\boxed{\text{イ}}$である。

(2)　pを定数とする。$n\geqq 2$のとき，数列$\{c_n\}$において，漸化式$c_{n+1}=p(c_n+c_{n-1})$が成り立つならば，$p=\boxed{\text{ウ}}$である。この漸化式から$c_{n+1}-\alpha c_n=\beta(c_n-\alpha c_{n-1})$，$c_{n+1}-\beta c_n=\alpha(c_n-\beta c_{n-1})$　$(n\geqq 2)$を満たす定数$\alpha,\ \beta$が定まる。$\alpha>\beta$であるとき，$\alpha=\boxed{\text{エ}}$，$\beta=\boxed{\text{オ}}$である。

(3)　$\alpha,\ \beta$を(2)で求めたものとする。一般項c_nを$\alpha,\ \beta,\ n$で表すと$c_n=\boxed{\text{カ}}$である。また，一般項a_nを$\alpha,\ \beta,\ n$で表すと$a_n=\boxed{\text{キ}}$である。したがって，数列$\{a_n\}$は収束し，$\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{\text{ク}}$である。

(1)　$n\geqq 3$のとき　$\dfrac{c_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{c_n}{b_n}}=\dfrac{b_n}{b_n+c_n}$　……①

ここで，b_nとb_n+c_nが公約数k $(k>1)$を持つとすると，$b_n=kl$，$b_n+c_n=kl'$（l，l'は自然数）とかける。

$c_n=kl'-b_n=k(l'-l)$となり，b_nとc_nは公約数k $(k>1)$を持つことになり，b_nとc_nが互いに素であることに矛盾する。

したがって，b_nとb_n+c_nは互いに素である。

①より

$b_{n+1}=b_n+c_n$　……②

$c_{n+1}=b_n$　……③

また，$b_1=1$，$c_1=0$，$b_2=c_2=1$，$a_3=\dfrac{1}{1+a_2}=\dfrac{1}{2}$より，$b_3=2$，$c_3=1$である。

②，③は$n=1$，2のときも成り立つ。

よって，すべての自然数nについて

$b_{n+1}=b_n+c_n$　，　$c_{n+1}=b_n$　→ア，イ

(2)　$n\geqq 2$のとき　$c_{n+1}=b_n=b_{n-1}+c_{n-1}$

また，$b_{n-1}=c_n$より　$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$

これより　　$p=1$ →ウ

$$c_{n+1}-c_n-c_{n-1}=0 \quad \cdots\cdots ④$$

ここで $t^2-t-1=0$ ……⑤の解を α, β $(\alpha>\beta)$ とおくと

$$\alpha+\beta=1 \quad , \quad \alpha\beta=-1$$

このとき，④は，$c_{n+1}-(\alpha+\beta)c_n+\alpha\beta c_{n-1}=0$ ……④′ とかける。

④′ より

$$c_{n+1}-\alpha c_n=\beta(c_n-\alpha c_{n-1}) \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$c_{n+1}-\beta c_n=\alpha(c_n-\beta c_{n-1}) \quad \cdots\cdots ⑦$$

と変形できる。

したがって，⑤より　$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ， $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ →エ，オ

(3)　$c_2-\alpha c_1=1$，$c_2-\beta c_1=1$，よって⑥，⑦より

$$c_{n+1}-\alpha c_n=\beta^{n-1} \quad \cdots\cdots ⑧$$

$$c_{n+1}-\beta c_n=\alpha^{n-1} \quad \cdots\cdots ⑨$$

⑨−⑧ より　$c_n=\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$ →カ

$$a_n=\frac{c_n}{b_n}=\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha^n-\beta^n} \quad →キ$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha^n-\beta^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1-\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{\alpha} \quad \left(|\alpha|>|\beta| \text{ より } \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1,\ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\to 0\right)$$

$$=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad →ク$$

【解答】(1)	ア　b_n+c_n	イ　b_n
(2)　ウ　1	エ　$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$	オ　$-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
(3)　カ　$\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$	キ　$\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha^n-\beta^n}$	ク　$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

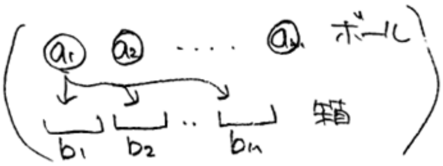
⑫$\boxed{5\text{-発-}6}$　**名古屋市立大学（改変あり）**

m 箇所の送信施設を持つ A 国から，n 箇所の受信施設を持つ B 国へ信号を送る。A 国の各施設は B 国の施設の中のただ 1 箇所に必ず信号を送るものとし，その送受信はいっせいに行われる。いま $m \geqq n$ とし，B 国のどの受信施設も A 国のどこかの送信施設からの信号を少なくとも 1 つは受信する場合を考える。このような送信パターンの数を $f(m, n)$ と表す。以下で m, n を変化させて考えるとき，次の問いに答えよ。

（1）$f(m, 3)$ を m を用いて表せ。

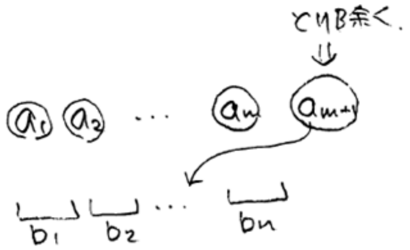
（2）$f(m+1, n)$ を $f(m, n)$ および $f(m, n-1)$ を用いて表せ。ただし，$n \geqq 2$ とする。

A国の送信施設を $a_1, a_2, \cdots, a_m$
B国の受信施設を $b_1, b_2, \cdots, b_n$ と表す



(1) $f(m, 3)$ を求める
信号を受信しない施設があってもよいとき 3^m 通り
信号を受信しない施設が 2 コなのは 3 通り
1 コなのは
$=$
${}_3C_2 \times (2^m - 2)$ 通り

$\therefore f(m, 3) = 3^m - \{3 + {}_3C_2 \times (2^m - 2)\}$
$= \underline{3^m - 3 \times 2^m + 3}$



(2) $f(m+1, n)$ 通りのうちで
a_{m+1} をとり除いた場合を考える
a_{m+1} の受信施設は n 通り
(i) a_{m+1} の受信施設が a_{m+1} 以外にも
あるとき，$a_1 \sim a_m$ から $b_1 \sim b_n$ のパターンは
$f(m, n)$ 通り
(ii) a_{m+1} の受信施設が a_{m+1} のみのとき（これを b_k とおく）
の
$a_1 \sim a_m$ から「$b_1 \sim b_n$ から b_k を除いたもの」の
パターンは
$f(m, n-1)$ 通り

$\therefore \underline{f(m+1, n) = n \times \{f(m, n) + f(m, n-1)\}}$

SoyPaste 場合の数

SP⑫5-1（r15-1）

赤色，青色，黄色のカードがそれぞれ 6 枚ずつある．これら 18 枚のカードから 6 枚を取り出して横一列に並べるとき，色の並べ方について中央で左右対称となるものは (　　) 通りある．

また，それぞれの色のカードが少なくとも 1 枚は使われるような並べ方は (　　) 通りある．

色の並べ方について，中央で左右対称となるものは左側の 3 枚の色を定めるだけでよいので，

$$3^3 = 27 \text{ 通り}.$$

また，カードの並べ方は全部で，$3^6 = 729$ 通りある．

このうち，1 つの色だけである並べ方は，

$$3 \text{ 通り}.$$

さらに，2 つの色だけであるカードの並べ方は，

$${}_3\mathrm{C}_2(2^6 - 2) = 186 \text{ 通り}.$$

したがって，それぞれの色のカードが少なくとも 1 枚は使われるカードの並べ方は，

$$729 - (3 + 186) = 540 \text{ 通り}.$$

SP⑫5-2 (j1-1)　○

7個の文字 F，G，G，I，I，U，U を横一列に並べる．

(1) 「GIFU」という連続した4文字が現れるように並べる方法は何通りか．

(2) 「GI」，「FU」という連続した2文字がともに現れ，少なくとも1つの「GI」が「FU」よりも左にあるように並べる方法は何通りか．

(1)　GIFU を1つの文字○と考えると，求める総数は，

$$4! = 24 \text{通り}.$$

(2)　GI，FU をそれぞれ1つの文字□，△を考え，G，I，U とともに並べるとき，□が△の左にある並べ方は，

$$\frac{5!}{2!} = 60 \text{通り}.$$

このうち，△の左に□と GI がある並べ方 (例えば，□ GI △ U)

4通り

が重複しているので，求める総数は，

$$60 - 4 = 56 \text{通り}.$$

SP⑫5-3 (j4-1)　○

0, 1, 2, 3, 4, 5 の数字が1つずつ記入した6枚のカードが入っている箱から1枚ずつ3枚のカードを取り出し，左から並べて自然数 n を作る．ただし，012 は 12 を表すものとする．

(1)　n が3桁の自然数となるのは何通りか．

(2)　3桁の自然数 n を作った後，箱の中に残っている3枚のカードを左から並べて3桁の自然数 m を作るとき，$n+m=555$ となるのは何通りか．

(1)　n が3桁の自然数となるのは，

$$5\times5\times4=100\text{通り}.$$

(2)　$A=\{0,\ 5\}$，$B=\{1,\ 4\}$，$C=\{2,\ 3\}$ とすると，

$$n+m=555$$

となるのは，A，B，C のそれぞれの2数が n と m の同じ位に用いられるときである．

百の位が A の数のときは n または m が3桁の整数にならないので，百の位の数は B または C の数である．

したがって，A，B，C の配置の仕方と n，m の作り方を考えると，

$$2\cdot2\times2^3=32\text{通り}.$$

SP⑫5-4（j12-5）　○

a，b，c は 1 以上 n 以下の整数とする．

(1)　$a < b < c$ となる a，b，c の組は全部で，$\boxed{\quad(1)\quad}$ 通りある．

(2)　$a \leqq b \leqq c$ となる a，b，c の組は全部で，$\boxed{\quad(2)\quad}$ 通りある．

(3)　$a < b$ かつ $a \leqq c$ となる a，b，c の組は全部で，$\boxed{\quad(3)\quad}$ 通りある．

(1)　求める総数は，

$$_n\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2).$$

(2)　求める総数は，

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!\,3!} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

(3)　$a = k$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ のとき，b の選び方が，

$$n - k \text{通り}$$

あり，そのそれぞれに対して，c の選び方が，

$$n - k + 1 \text{通り}$$

あるので，求める総数は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(n-k)(n-k+1) &= \sum_{k=1}^{n}k^2 - (2n+1)\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}n(n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &\qquad - \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + n^2(n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1).\end{aligned}$$

SP⑫5-5（r14-2)　○

１分ごとに１回の割合で２つに分裂する細胞がある．この細胞にはＡ，Ｂの２つのタイプがあり，タイプＡはタイプＡとタイプＢに，タイプＢは２つのタイプＡにそれぞれ分裂する．最初のタイプＡ，タイプＢの細胞の個数をそれぞれ１，０とし，n 分後のタイプＡ，タイプＢの細胞の個数をそれぞれ a_n，b_n とする．

(1)　a_n+b_n を求めよ．

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n を用いて表せ．

(3)　a_n-2b_n を求めよ．

(4)　a_n，b_n を求めよ．

(1)　各細胞は１分後に２倍になるから，n 分後の細胞の総数 a_n+b_n は，

$$a_n+b_n=2^n.$$

(2)　a_n 個のタイプＡの細胞は１分後に a_n 個のタイプＡと a_n 個のタイプＢに分裂し，b_n 個のタイプＢの細胞は１分後に $2b_n$ 個のタイプＡの細胞に分裂するので，

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2b_n, \\ b_{n+1}=a_n. \end{cases}$$

(3)　(2) の結果より，

$$a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n)$$

であるから，$a_0=1$，$b_0=0$ より，

$$\begin{aligned} a_n-2b_n &= (a_0-2b_0)(-1)^n \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

(4)　(1)，(3) の結果より，

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{3}\{2^{n+1}+(-1)^n\}, \\ b_n=\dfrac{1}{3}\{2^n-(-1)^n\}. \end{cases}$$

SP⑫5-6 (j15-3)　△

5 個の整数 1，2，3，4，5 の中から，重複を許して 3 個取り出して a，b，c とし，3 桁の整数

$$X = 100a + 10b + c$$

を作る．

(1) 整数 X は全部で何通りできるか．

(2) 偶数の X，3 の倍数の X，5 の倍数の X，7 の倍数の X，13 の倍数の X はそれぞれ何通りできるか．

(1) X の定め方より，整数 X は全部で，

$$5^3 = 125 \text{通り}$$

できる．

(2) X が偶数となるための条件は，

$$c\text{が偶数}$$

となることなので，偶数の X は，

$$5 \times 5 \times 2 = 50 \text{通り}.$$

さらに，X が 5 の倍数となるための条件は，

$$c = 5$$

となることなので，5 の倍数の X は，

$$5 \times 5 \times 1 = 25 \text{通り}.$$

また，

$$X = 3(33a + 3b) + a + b + c$$

であるから，X が 3 の倍数となるための条件は，

$$a + b + c \text{が 3 の倍数}.$$

ここで，3 つの集合 A，B，C を

$$A = \{1,\ 4\},\quad B = \{2,\ 5\},\quad C = \{3\}$$

定めると，$a + b + c$ が 3 の倍数となるのは次の 4 つの場合がある．

(i) a，b，c がすべて集合 A に属する数のとき，

$$2^3 = 8 \text{通り}.$$

(ii) a，b，c がすべて集合 B に属する数のとき，

$$2^3 = 8 \text{通り}.$$

(iii) a，b，c がすべて集合 C に属する数のとき，

$$1 \text{通り}.$$

(iv) a，b，c が属する集合がすべて異なるとき，

$$2 \times 2 \times 1 \times 3! = 24 \text{通り}.$$

(i)〜(iv) より，3 の倍数の X は，

$$8 + 8 + 1 + 24 = 41 \text{通り}.$$

さらに，

$$X = 7(14a + b) + 2a + 3b + c$$

であるから，X が 7 の倍数となるための条件は，

$$2a + 3b + c \text{が 7 の倍数}.$$

ここで，$2a + 3b$ の値を調べると，次の表のようになる．

a \ b	1	2	3	4	5
1	5	8	11	14	17
2	7	10	13	16	19
3	9	12	15	18	21
4	11	14	17	20	23
5	13	16	19	22	25

このうち，7 で割ると余りが 2，3，4，5，6 である数は，

$$2a + 3b + c$$

が 7 の倍数となる c がただ 1 つ存在し，7 で割ると余りが 0，1 である数に対しては，

$$2a + 3b + c$$

が 7 の倍数となる c は存在しない．

したがって，7 の倍数となる X は，

$$18 \text{通り}.$$

さらに，

$$X = 13(8a + b) - 4a - 3b + c$$

であるから，X が 13 の倍数となるための条件は，

$$-4a - 3b + c \text{が 13 の倍数}.$$

ここで，$4a + 3b$ の値を調べると，次の表のようになる．

a \ b	1	2	3	4	5
1	7	10	13	16	19
2	11	14	17	20	23
3	15	18	21	24	27
4	19	22	25	28	31
5	23	26	29	32	35

このうち，13 で割ると余りが 1，2，3，4，5 である数は，

$$4a + 3b + c$$

が 13 の倍数となる c がただ 1 つ存在し，13 で割ると余りが 0，6，7，8，9，10，11，12 である数に対しては，

$$4a + 3b + c$$

が 13 の倍数となる c は存在しない．

したがって，13 の倍数となる X は，

$$9 \text{通り}.$$

SP⑫5-7（j35-5）　△　【問題文省略】

【解答】　(2010・センター試験・追試)

長さ 3 の文字列は aba，abc，aca，acb であるから，

$$a_3 = 2, \qquad b_3 = 1, \qquad c_3 = 1.$$

また，長さ 4 の文字列で a で終わるのは abca，acba であるから，

$$a_4 = 2.$$

さらに，$a_{n+1} = b_n + c_n$ であり，$b_n - c_n = 0$ であるから，

$$b_n = \frac{1}{2}a_{n+1}.$$

また，$d_n = a_n + b_n + c_n$ のとき，

$$d_1 = 1, \qquad d_{n+1} = 2d_n$$

が成り立つから，

$$d_n = 2^{n-1}.$$

さらに，

$$d_n = a_n + a_{n+1}$$

であるから，$a_{n+1} = ra_n + d_n$ となるのは，

$$r = -1 \text{ のとき}.$$

また，$A_{n+1} = A_n + r^{-n-1}d_n$ より，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} A_n &= A_1 + \sum_{k=1}^{n-1} r^{-k-1} \cdot 2^{k-1} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{r}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{r}} \end{aligned}$$

であるから，$r = -1$ より，

$$A_n = -1 + \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{2}{r}\right)^{n-1}\right\}.$$

さらに，$a_n = r^n A_n$ なので，

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} + \frac{2}{3}r^{n-1}.$$

SP⑫5-8（j19-5）　◎

硬貨を繰り返して投げる。同じ面がちょうど n 回だけ続いて出たとき，そのひと続きの並びを連と呼び，n をその連の長さと呼ぶことにする。ただし，$n=1$ の場合も含む。

硬貨を 6 回繰り返して投げる。このとき，現れる連の長さの最大値を得点とする。例えば，出た面が (表，表，裏，裏，表，裏) のときは，連の長さは順に 2，2，1，1 であるから，得点は 2 点であり，出た面が (表，表，表，裏，裏，表) のときは，連の長さは順に 3，2，1 であるから，得点は 3 点である。

(1) 得点が 5 点となるのは $\boxed{ア}$ 通りである。

得点が 2 点となる場合，長さ 2 の連が 1 度だけ現れるのは $\boxed{イウ}$ 通り，ちょうど 2 度現れるのは $\boxed{エオ}$ 通り，3 度現れるのは $\boxed{カ}$ 通りである。

(2) 得点が 1 点である確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$，得点が 4 点である確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サシ}}$，得点が 6 点である確率は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}$ である。

【補】得点が 3 点となる場合について

○○○×□□，×○○○×□，□×○○○×，□□×○○○

を考えて，裏の場合を考えると，

○○○×××，×××○○○

を 2 度数えているので，

$$(4+2+2+4)\times 2-2=22 \text{ 通り}.$$

(1)　得点が 5 点となるのは，表の連の長さが 5 の場合が 2 通りあるので，裏の場合も考えると，

$$4\text{通り}.$$

得点が 2 点となる場合，長さ 2 の表の連が 1 度だけ現れるのは 5 通りあるから，裏の場合も考えると，

$$10\text{通り}.$$

さらに，3 度現れるのは表の 2 連から始まるのか，裏の 2 連から始まるのかの

$$2\text{通り}.$$

また，ちょうど 2 度現れるのは，表を○，裏を×で表すと，

(○, ○, ×, ○, ○, ×), (×, ×, ○, ×, ×, ○),

(×, ○, ○, ×, ○, ○), (○, ×, ×, ○, ×, ×),

(○, ○, ×, ×, ○, ×), (×, ×, ○, ○, ×, ○),

(○, ○, ×, ○, ×, ×), (×, ×, ○, ×, ○, ○),

(○, ×, ○, ○, ×, ×), (×, ○, ×, ×, ○, ○),

(×, ○, ○, ×, ×, ○), (○, ×, ×, ○, ○, ×)

の

$$12\text{通り}.$$

(2)　表裏の出方は，

$$2^6 = 64\text{通り}$$

あり，これらは同様に確からしい.

このとき，得点が 1 点となるのは表から始まるのか，裏から始まるのかの 2 通りあるので，得点が 1 点となる確率は，

$$\frac{2}{64} = \frac{1}{32}.$$

さらに，得点が 6 点となるのは表が 6 連なのか，裏が 6 連なのかの 2 通りあるので，得点が 6 点となる確率は，

$$\frac{2}{64} = \frac{1}{32}.$$

また，得点が 4 点となる場合，表が 4 連のときを，表を○，裏を×，表裏どちらでもよいを□で表すと，

(○, ○, ○, ○, ×, □),

(×, ○, ○, ○, ○, ×),

(□, ×, ○, ○, ○, ○)

であるから，裏の場合も考えると，得点が 4 点となる確率は，

$$\frac{(2+1+2)\times 2}{64} = \frac{5}{32}.$$