試験時間50分（短）

$\boxed{1}$ 不等式 $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}} \geqq x^2$ を解け.

$\boxed{2}$ $\sqrt{2-x^2} > 2x-1$ を解け.

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ のとき，$f(f(f(x)))$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 次の空欄に当てはまる数式を入れよ。（一桁の整数**<u>とは限らない</u>**）

関数 $f(x)=ax^2+bx+c\left(a \neq 0,\, x>-\dfrac{b}{2a}\right)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ で表す.

(1) $f^{-1}(0)=\dfrac{4}{3}, f^{-1}(2)=2, f^{-1}(10)=3$ のとき，係数は $a=$ $^{ア}\boxed{}$, $b=-$ $^{イ}\boxed{}$,

$c=$ $^{ウ}\boxed{}$ である.

(2) 係数 a, b は (1) で得られた値を用い，係数 c の値だけ変化させることを考える．この場合，関数 $f(x)$ と逆関数 $f^{-1}(x)$ が 1 点で接するのは，$c=$ $^{エ}\boxed{}$ のときである.

$\boxed{5}$ 方程式 $\sqrt{2x-5}-1=ax+1$ がただ1つの実数解を持つときの a の条件を求めよ。

$\boxed{6}$ 不等式 $\sqrt{3x^2-12} \leqq x+4$ を満たす x の範囲を求めよ。

$\boxed{7}$ 次の空欄に当てはまる数式を入れよ。（一桁の整数**<u>とは限らない</u>**）

関数 $y=\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ の周期は, $\boxed{\text{ア}}$ である。また，この関数のグラフは,

$y=\cos 4x$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{イ}}$ だけ平行移動したものである。

$\boxed{8}$ θ に関する方程式 $4\sin^2\theta-4\cos\theta+4a-1=0$ $(0° \leqq \theta < 360°)$ が異なる 4 つの解をもつような定数 a の範囲を求めよ。

$\boxed{9}$ 2 つの楕円 $C_1：\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，$C_2：x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ について

(1) C_1 と C_2 の交点の座標をすべて求めよ。

(2) C_1 の内部と C_2 の内部の共通部分の面積を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　$-3 \leqq x < -2$，$0 < x \leqq 1$

$\boxed{2}$ 解答　$-\sqrt{2} \leqq x < 1$

$\boxed{3}$ 解答　$f(f(f(x))) = \dfrac{x-1}{x+1}$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　(ア)　3　　(イ)　7　　(ウ)　4　　(2)　(エ)　$\dfrac{16}{3}$

$\boxed{5}$ 解答　$-\dfrac{4}{5} \leqq a \leqq 0$，　$a = \dfrac{1}{5}$ のとき

$\boxed{6}$ 解答　$2-3\sqrt{2} \leqq x \leqq -2$，$2 \leqq x \leqq 2+3\sqrt{2}$

$\boxed{7}$ 解答　(ア)　$\dfrac{\pi}{2}$　　(イ)　$\dfrac{\pi}{8}$

$\boxed{8}$ 解答　$-1 < a < -\dfrac{3}{4}$

$\boxed{9}$ 解答　(1)　$\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(複号任意)　　(2)　$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

$\boxed{1}$ $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}} \geqq x^2$ から　$x \neq 0$, $x \neq -2$, $\dfrac{3x}{x+2} \geqq x^2$

ゆえに　$\dfrac{x(x-1)(x+3)}{x+2} \leqq 0$

よって　$-3 \leqq x < -2$, $0 < x \leqq 1$

$\boxed{2}$ $\sqrt{2-x^2} = 2x-1$ とおくと $2-x^2 \geqq 0$, $2x-1 \geqq 0$ より

$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ ……①

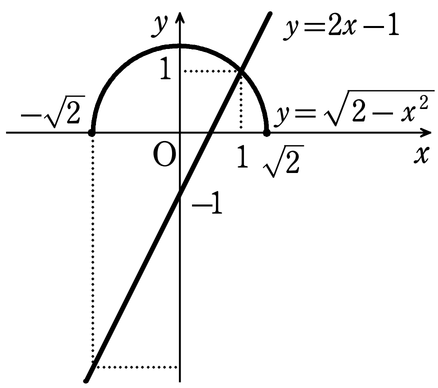
平方して $2-x^2 = 4x^2-4x+1$

$(x-1)(5x+1) = 0$

① から $x=1$

したがって　$y=\sqrt{2-x^2}$ と $y=2x-1$ のグラフから,

求める解は $-\sqrt{2} \leqq x < 1$



$\boxed{3}$ $f(f(x)) = \left(1+\dfrac{1+x}{1-x}\right) \Big/ \left(1-\dfrac{1+x}{1-x}\right) = -\dfrac{1}{x}$

$f(f(f(x))) = f\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1-1/x}{1+1/x} = \dfrac{x-1}{x+1}$

$\boxed{4}$ (1)　$f\left(\dfrac{4}{3}\right)=0$, $f(2)=2$, $f(3)=10$ から　$\dfrac{16}{9}a+\dfrac{4}{3}b+c=0$ ……①,

$4a+2b+c=2$ ……②,　$9a+3b+c=10$ ……③

②, ③ から　$b=8-5a$, $c=6a-14$

これらを ① に代入して　$16a+12(8-5a)+9(6a-14)=0$

ゆえに　$10a-30=0$ から　$a={}^{ア}3$, $b=-{}^{イ}7$, $c={}^{ウ}4$

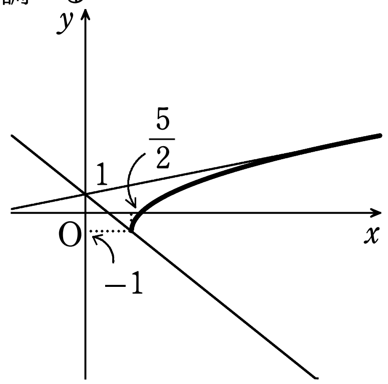
(2)　$f(x)=3x^2-7x+c$　$f(x)$ と $f^{-1}(x)$ が 1 点で接するとき,

$f(x)$ と直線 $y=x$ も 1 点で接する.

$3x^2-7x+c=x$　すなわち　$3x^2-8x+c=0$ は重解をもつ.

$\dfrac{D}{4}=16-3c=0$ から　$c={}^{エ}\dfrac{16}{3}$

$\boxed{5}$ まず$y=ax+1$ と $y=\sqrt{2x-5}-1$ が接するときを調べる



連立して　$ax+1=\sqrt{2x-5}-1$

整理すると　$a^2x^2+2(2a-1)x+9=0$

判別式を D とすると $D=0$ より

$$\frac{D}{4}=4a^2-4a+1-9a^2$$
$$=-(5a^2+4a-1)$$
$$=-(a+1)(5a-1)=0$$

グラフから　$a=\frac{1}{5}$

(2)　$y=ax+1$ が点 $\left(\frac{5}{2},\ -1\right)$ を通るのは　$a=-\frac{4}{5}$　のとき。

ゆえに，実数解の個数は，グラフから

$$-\frac{4}{5}\leqq a\leqq 0,\ a=\frac{1}{5}\ \text{のとき 1 個}$$

$\boxed{6}$ $3x^2-12\geqq 0$，$x+4\geqq 0$ から　　$-4\leqq x\leqq -2$，$2\leqq x$　……①

① のとき，与えられた不等式の両辺は 0 以上であるから，両辺を 2 乗して

$$3x^2-12\leqq (x+4)^2$$

整理すると　　$x^2-4x-14\leqq 0$

これを解くと　　$2-3\sqrt{2}\leqq x\leqq 2+3\sqrt{2}$　……②

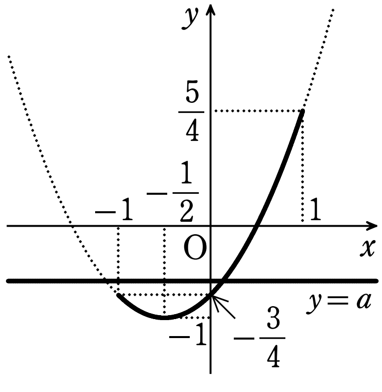
①，② から　　$2-3\sqrt{2}\leqq x\leqq -2$，$2\leqq x\leqq 2+3\sqrt{2}$

$\boxed{7}$ $y=\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

よって，周期は　$2\pi\div 4=\frac{\pi}{{}^{ア}2}$

また，このグラフは，$y=\cos 4x$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\pi}{{}^{イ}8}$ だけ平行移動したものである。

$\boxed{8}$ $4\sin^2\theta-4\cos\theta+4a-1=0$ を変形して



$$a=-\sin^2\theta+\cos\theta+\frac{1}{4}$$

$y=-\sin^2\theta+\cos\theta+\frac{1}{4}$, $\cos\theta=x$ とおくと

$$y=-(1-x^2)+x+\frac{1}{4}=x^2+x-\frac{3}{4}$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

よって，直線 $y=a$ と曲線 $y=x^2+x-\frac{3}{4}$ との交点が，$-1<x<1$ において 2 つあるとき，与えられた方程式は異なる 4 つの解をもつ.

ゆえに，求める a の値の範囲は，上のグラフから　$-1<a<-\dfrac{3}{4}$

$\boxed{9}$ (1)　C_1，C_2 は，それぞれ x 軸，y 軸，原点に関して対称である。

C_1 の方程式から　$y^2=1-\dfrac{x^2}{3}$　……①

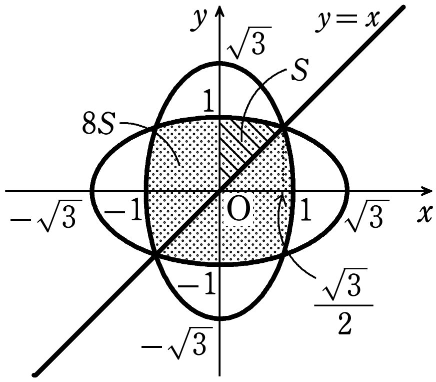
これを C_2 の方程式に代入して　$x^2+\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{x^2}{3}\right)=1$

これを解くと　$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　① から　$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，求める交点の座標は　$\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$（複号任意）

(2)　第 1 象限における C_1 と C_2 の交点は

点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。



右の図の斜線部分の面積を S とすると，図形の対称性から，求める面積は $8S$ である。

① において，$y\geqq 0$ とすると

$$y=\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}$$

よって　$S=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{3-x^2}\,dx-\frac{3}{8}$

ここで，$x=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと　$dx=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \to \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$0 \to \dfrac{\pi}{6}$

よって　$S=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{3-3\sin^2\theta}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta-\frac{3}{8}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{3}\cos^2\theta\,d\theta-\frac{3}{8}=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta-\frac{3}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{3}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

したがって，求める面積は　$8S=8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$