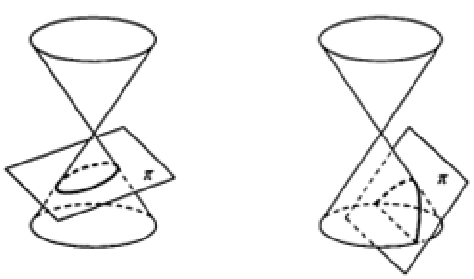
二次曲線

別名　円錐曲線～円錐を図のように切断して現れる



（楕円）　（放物線）　（双曲線）

$\boxed{\text{離心率}}$　定点Fと定直線lに対して$\dfrac{\mathrm{FP}}{\mathrm{HP}}=e$（一定）を満たす点Pの軌跡は二次曲線になる。
このとき，eを離心率という。

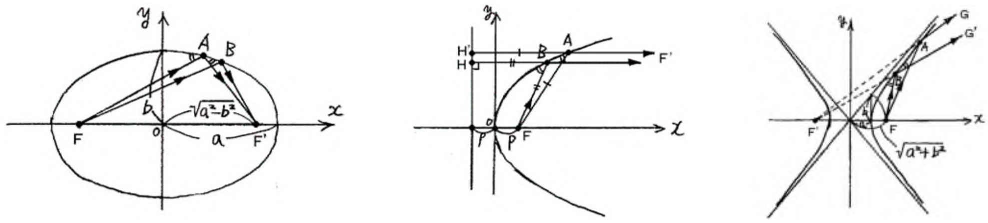
二次曲線・チェックリスト

○　二次曲線の接線公式　２乗の片方に接点代入，２乗がなければ係数半分にして片方に接点代入

○　だ円と直線，だ円と面積　⇒　円だ円変換
○　だ円の最大最小　⇒　だ円のパラメータ表示

○　双曲線　＝　漸近線までの距離の積が一定

○　光学的性質
①楕円：点光源の光を一点に集める
②放物線：点光源の光を平行光線にする
③双曲線：点光源の虚像を作る



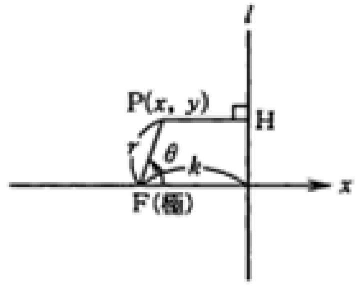
○　だ円の準円　：　だ円外から直交二接線が引ける点の軌跡は円となる。
（例）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　の準円は　$x^2+y^2=a^2+b^2$

極座標

（注2）　$r<0$ の場合を考えることもある．このとき，$(r,\ \theta)$ と $(-r,\ \theta+\pi)$ は同じ点を表す極座標である．∎

❷　2次曲線の極方程式

$F(0,\ 0)$ を極，$l:x=k\ (k>0)$ として，離心率 $e\ (e>0)$ の2次曲線の極方程式を求める．



$r<0$ の場合も込めて考えると

$\mathrm{FP}=|r|$，　$\mathrm{HP}=|k-x|=|k-r\cos\theta|$

であるから

$$\mathrm{FP}=e\cdot\mathrm{HP} \iff |r|=e|k-r\cos\theta|$$
$$\iff r=\pm e(k-r\cos\theta)$$
$$\iff r=\frac{ek}{1+e\cos\theta}\quad(\cdots①),\quad r=\frac{-ek}{1-e\cos\theta}\quad(\cdots②).$$

極座標においては，$(r,\ \theta)$ と $(-r,\ \theta+\pi)$ は同じ点を表すから，① において θ を $\theta+\pi$，r を $-r$ と置き換えると

$$-r=\frac{ek}{1+e\cos(\theta+\pi)}=\frac{ek}{1-e\cos\theta}=-\frac{-ek}{1-e\cos\theta}.$$

これは ② と同値になり，その結果，①，② それぞれの表す図形は全体として一致する．① を代表にとれば，極方程式は

$$r=\frac{ek}{1+e\cos\theta}.$$

楕円では $0<e<1$，放物線では $e=1$，双曲線では $e>1$ となる．

極座標・チェックリスト

○　放物線の焦点を極とする極座標では，「定義の利用」が有効

談話室マロニエ　数学QUIZ　二次曲線

A 問題

放物線の定義　ある点Fと直線lからの距離が等しい点の集合である。Fを$\boxed{\text{ア}}$, lを$\boxed{\text{イ}}$という。

楕円の定義　ある2定点からの距離の和が一定値である点の集合である。

双曲線の定義　ある2定点からの距離の差が一定値である点の集合である。

放物線$y^2=4px$の$\boxed{\text{ア}}$の座標は$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{イ}}$の方程式は$\boxed{\text{エ}}$である。また，頂点は$\boxed{\text{オ}}$である。

楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）の軸との交点の座標をすべて求めると，$\boxed{\text{カ}}$である。

長軸の長さは$\boxed{\text{キ}}$，短軸の長さは$\boxed{\text{ク}}$であり，焦点の座標は$\boxed{\text{ケ}}$である。

また，中心の座標は$\boxed{\text{コ}}$である。

双曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0, b>0$）の軸との交点の座標をすべて求めると，$\boxed{\text{サ}}$である。

漸近線の方程式は$\boxed{\text{シ}}$であり，焦点の座標は$\boxed{\text{ス}}$である。

また，中心の座標は$\boxed{\text{セ}}$である。

放物線$y^2=4px$上の点$\left(x_0, y_0\right)$における接線は，$\boxed{\text{ソ}}$である。

楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上の点$\left(x_0, y_0\right)$における接線は，$\boxed{\text{タ}}$である。

双曲線の接線公式は，楕円と同様。

B 問題

楕円のパラメータ表示　　楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上の点は，変数θ を用いて，

$x=$ [チ]，$y=$ [ツ] と表せる。

C 問題

放物線外の点 P から引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡の方程式は [テ] であり，

[ト] と呼ばれる。

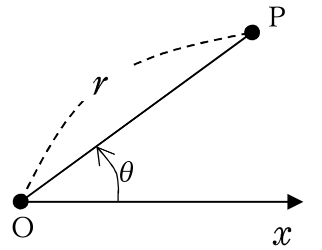
楕円外の点 P から引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡の方程式は [ナ] であり，

[ニ] と呼ばれる。

談話室マロニエ　数学 QUIZ　極座標

A 問題

極座標



点 P の極座標を$\mathrm{P}(r,\ \theta)$と表す

点 O は極，

半直線Oxは始線，

θは偏角という。

（注）$r \geqq 0$とすることが多い。$r=0$のときθは不定である。

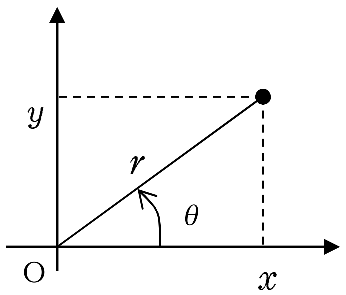
極座標と直交座標の関係

点 P の極座標を$(r,\ \theta)$，

直交座標を(x, y)とすると，

（1）$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

（2）$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}$



[極方程式]　曲線上の点 P の極座標$(r,\ \theta)$について，

rとθの関係式をその曲線の極方程式という。

極方程式はできるだけ$r=f(\theta)$の形にすることが望ましい。

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより
二次曲線篇

標準問題

③**4**-標-**1**

（1）$y^2-2x+4y+6=0$ で表される放物線の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。

（2）焦点の座標が $\left(-1,3\right),\left(5,3\right)$ で，長軸の長さが 10 である楕円の方程式を求めよ。

（3）点 $\left(2,0\right)$ を 1 つの焦点とし，2 直線 $y-x-1=0$ と $y+x+1=0$ を漸近線とする双曲線の方程式を求めよ。

③**4**-標-**2**

放物線 $y^2=4px\ \left(p>0\right)$ の焦点 F を通る弦の両端 PQ から準線へ下した垂線の足をそれぞれ R, S とする。

（1）RF は SF に垂直であることを示せ。

（2）線分 RS の中点を M とし，2 線分 PR，QS の長さをそれぞれ a,b とするとき，線分 MF の長さを a,b で表せ。

③**4**-標-**3**

座標平面上にある 3 点 A，B，C があり，B の座標は $\left(-5,0\right)$，C の座標は $\left(5,0\right)$，線分 AB の長さは $3\sqrt{10}$，線分 AC の長さは $\sqrt{10}$ である。

（1）焦点が B，C で，点 A を通るだ円の方程式を求めよ。

（2）焦点が B，C で，点 A を通る双曲線の方程式を求めよ。

（3）点 A において（1）のだ円と（2）の双曲線にそれぞれ接線を引くと，この 2 本の接線は直交することを証明せよ。

③$\boxed{\textbf{4-標-4}}$

点 A$\left(-a,\ 0\right)$ を中心とする半径 r_0 の円 C_0 の内部に，点 B$\left(a,\ 0\right)$ を中心とする半径 r_1 の円 C_1 があり，$a \fallingdotseq 0$ とする。円 C_0 に内接し，円 C_1 に外接する円 C の中心 P の軌跡を求めよ。

③$\boxed{\textbf{4-標-5}}$

座標平面上に，中心 A$\left(-2,\ 0\right)$，半径 1 の円 C_1 と中心 B$\left(4,\ 0\right)$，半径 4 の円 C_2 がある。C_1 および C_2 に外接する円の中心 P の軌跡を求めよ。

③$\boxed{\textbf{4-標-6}}$

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \left(a>0,\ b>0\right)$ の第 1 象限の部分の任意の 1 点を P とする。
P におけるだ円の接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q, R，原点を O とする。

（1）△OQR の面積の最小値を求めよ。

（2）線分 QR の長さの最小値を求めよ。

③$\boxed{\textbf{4-標-7}}$

だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の互いに垂直な接線の交点 P の軌跡 L を求めよ。

③4-標-8

（1）円$x^2+y^2-4x-4y=0$を極方程式で表せ

（2）極方程式$r^2-4r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=-3$を直交座標の方程式で表せ。

③4-標-9

楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$の周上を 2 点P, Q が$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$を満たすように動いている。ただし，O は原点とする。このとき，$\dfrac{1}{\mathrm{OP}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{OQ}^2}$が一定であることを証明せよ。

③4-標-10

放物線$y^2=4px\ (p>0)$について，

（1）焦点 F を極，x軸の正の部分を始線とする極方程式を求めよ。

（2）焦点 F で直交する限をPQ, RSとすれば，$\dfrac{1}{\mathrm{FP}\cdot\mathrm{FQ}}+\dfrac{1}{\mathrm{FR}\cdot\mathrm{FS}}$ は一定であることを証明せよ。

発展問題

③**4**-発-**1**

座標平面上に定点 $\mathrm{A}(0, a)$ $(a>0)$ と動点 P がある。P より x 軸に下ろした垂線の足を H とする。定数 $k>0$ に対して，$\mathrm{PA}=k\mathrm{PH}$ が成立するならば，点 P はある 2 次曲線上にある。

(1)　2 次曲線が放物線となる k の値を求めよ。

(2)　2 次曲線が楕円となる k の値と，楕円の中心を求めよ。

(3)　2 次曲線が双曲線となる k の値と焦点の座標を求めよ。

③**4**-発-**2**

放物線 $y^2=4px$ $(p\neq 0)$ の弦 PQ の両端と頂点 O とを結ぶ線分 PO，QO が直交するならば，直線 PQ は定点を通ることを示し，その定点 A の座標を求めよ。ただし，$\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$, $\mathrm{Q}\neq\mathrm{O}$ とする。

③**4**-発-**3**

放物線 $y^2=4px$ 上の頂点以外の点を P とし，P における接線 g が x 軸と交わる点を Q，放物線の焦点を F とする。また，P を通り x 軸に平行な直線上の 1 点 R を放物線内にとる。このとき，PR と接線 g のなす角は $\angle\mathrm{FPQ}$ に等しいことを証明せよ。

③**4**-発-**4**

(1) 直交座標において, 点A$\left(\sqrt{3}, 0\right)$と準線$x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$からの距離の比が$\sqrt{3}:2$である点P$\left(x, y\right)$の軌跡を求めよ。

(2) (1)における A を極，x軸の正の部分と半直線 AX のなす角θを偏角とする極座標を定める。このとき，P の軌跡を$r=f(\theta)$の形の極方程式で求めよ。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$，$r>0$とする。

(3) A を通る任意の直線と(1)で求めた曲線との交点を R，Q とする。このとき，$\dfrac{1}{\mathrm{RA}}+\dfrac{1}{\mathrm{QA}}$は一定であることを示せ。

③**4**-発-**5**

　楕円$Ax^2+By^2=1$　（A, Bは正の定数）の外部の点P$\left(x_0, y_0\right)$から，この楕円にひいた接線の接点を Q，R とするとき，直線 QR は$Ax_0x+By_0y=1$という方程式で表されることを示せ。

③**4**-発-**6**

　楕円$Ax^2+By^2=1$　（A, Bは正の定数）上の異なる 2 点 P，Q における接線の交点 R と原点 O を結ぶ直線は，弦 PQ の中点 M を通ることを示せ。

③**4**-発-**7**

だ円$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$の 2 つの焦点を$\mathrm{F}, \mathrm{F}'$とし，だ円上の動点を P とする。ただし，$a>b>0$である。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PF}'}$ の内積$\overrightarrow{\mathrm{PF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PF}'}$ の値の範囲を求めよ。

③**4**-発-**8**

双曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$がある。ただし，$a>0, b>0$とする。

(1) 2 つの漸近線のなす角をθとするとき，$\sin\theta$を求めよ。

(2) 双曲線上の点$\mathrm{P}\left(p, q\right)$（$p>0, q>0$とする）を通り，2 つの漸近線に平行な直線を引き，それぞれが漸近線と交わる点をQ，R とする。このとき，平行四辺形OQPR（O は原点）の面積を求めよ

SoyPaste 二次曲線

SP③5-1 (r25-2)

楕円 E : $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=1$ について，次の問に答えよ．

(1) E の 2 つの焦点の座標を求めよ．

(2) E と x 軸との交点の x 座標を求めよ．

(3) 点 $(2,\ 0)$ を通る E の 2 本の接線を $l,\ m$ とするとき，$l,\ m$ の方程式をそれぞれ求めよ．

(4) $l,\ m$ と E で囲まれた図形の面積を求めよ．

SP③5-2 (r42-2) ○

楕円 C : $x^2+4y^2=1$ 上の第 1 象限部分の点 P に対して，点 P における C の法線 l と x 軸との交点を Q，楕円 C の 2 つの焦点のうち x 座標が正のものを F とする．

このとき，$\dfrac{\mathrm{QF}}{\mathrm{PF}}$ の値は P のとり方によらず一定であることを示せ．

SP③5-3 (r-43-2) ○

a は正の実数とする．xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t によって，

$$x=\frac{4at}{1+t^2},\quad y=\frac{4at^2}{1+t^2}$$

と表されているとする．

(1) t が実数全体を変化するとき，C はどのような図形を描くか．

(2) $t=2$ における C の接線の方程式を求めよ．

SP③5-4（j6-3） △

円 $x^2+y^2-12x-10y+59=0$ 上の点 $(7,\ 4)$ における接線を l とする．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) l に平行で，$x<0$ において，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に接する直線の方程式を求めよ．

SP③5-5（j13-2） ○

a，b を正の実数とする．楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる楕円が y 軸と直線 $y=x$ に接するような a，b の値を求めよ．

SP③5-6（j17-3）

xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，

$$\begin{cases} x=\dfrac{4\cos t-2}{5-4\cos t}, \\ y=\dfrac{4\sin t}{5-4\cos t} \end{cases} \quad (0\leqq t\leqq \pi)$$

と表されている．

(1) $y\geqq 0$ であることを示せ．

(2) $\sin t$ を x，y を用いて表せ．

(3) t が $0\leqq t\leqq \pi$ の範囲を動くとき，点 P はどのような図形を描くか．

SP③5-7（j39-2）

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(\sqrt{2},\ 1)$ における接線を l_1，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ の 2 本の漸近線を l_2，l_3 とする．3 本の直線 l_1，l_2，l_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ．

SP③5-8（s43-1） ○

座標平面上で，極方程式 $r=\sqrt{\cos 2\theta}$ が表す曲線の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ に対応する部分を C とする．

(1) 曲線 C 上の点 P の直交座標 $(x,\ y)$ を θ の式で表せ．

(2) 曲線 C 上の点 Q の極座標を $(r,\ \theta)$ とする．点 Q における C の接線の傾きが -1 であるとき θ の値を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸によって囲まれる図形の $x \geqq \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ の部分の面積を求めよ．