平面ベクトル

●矢印として，演算の導入

和・差・実数倍

《Point》　内分・外分，中点・重心，一直線上，交点，
線分比，面積比　etc.

⇩

内積導入

内積＝「大きさ（長さ)」と「角度」の複合概念
⇒ 大きさ（長さ）⇒二乗　（内積に持ち込む）
　 なす角　⇒　内積　　　特に，垂直なら内積ゼロ

《Point》　垂線の足，垂心（垂線の交点)，外心（垂直二等分線の交点）
円の公式（2 種） etc. 内心（角の二等分線公式利用)，傍心
⇒「面積」そのものが求まる。
《Point》　２辺夾角で面積が求まる。(２種)

●図形的意味＝自由な斜交座標

内積導入前：軟らかい斜交座標
内積導入後：硬い斜交座標
《Point》始点の統一。平面なら 2 本，空間なら 3 本のベクトルで表す。

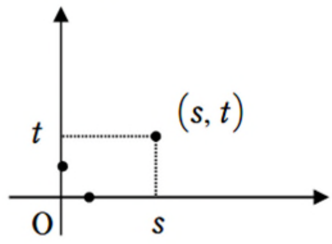
●成分　：　基本は矢印のときと同じ

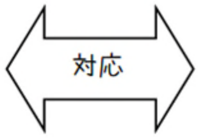
位置ベクトルの成分⇔終点の座標
《Point》基本は矢印としてのベクトルと同じ

斜交座標

●直交座標

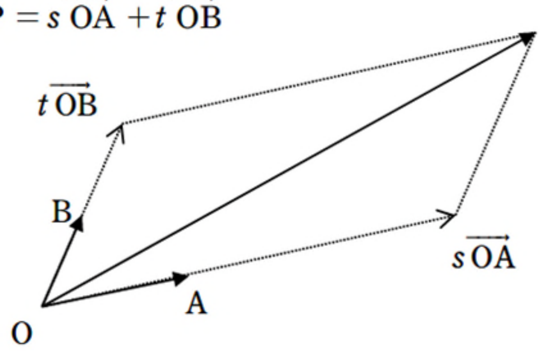
点(s, t)



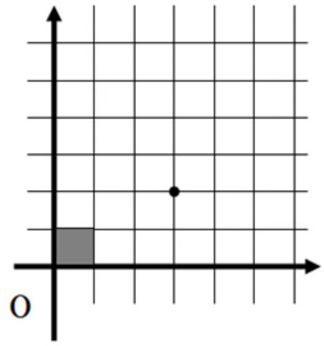


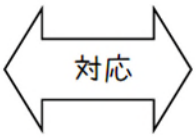
●斜交座標

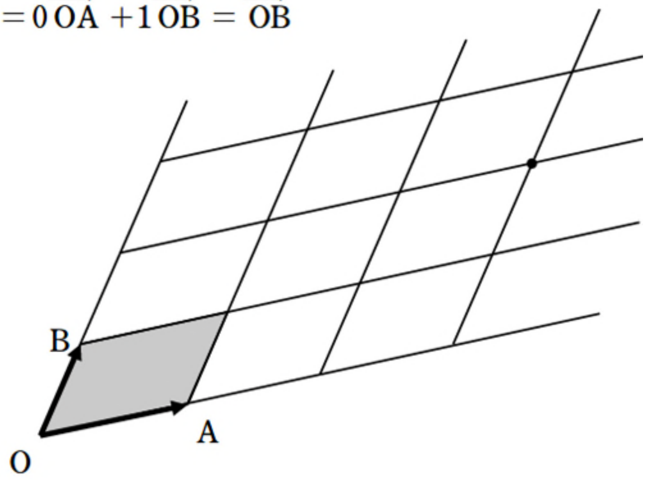
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



$$\begin{cases} \mathrm{O}(0, 0) \leftrightarrow \mathrm{O} & \leftarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 0\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OO}} = \vec{0} \\ (1, 0) \leftrightarrow \mathrm{A} & \leftarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 1\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 0\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ (0, 1) \leftrightarrow \mathrm{B} & \leftarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 1\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} \end{cases}$$







注　斜交座標で考えると難しい問題でも，
　　まず対応する直交座標で考えるほうがうまくいくことがあります。

《発展》$\boxed{\text{一次独立}}$

２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が座標の代わりになるとき，

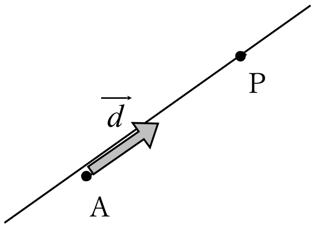
つまり，$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ をみたすとき，

$\vec{a}$, $\vec{b}$ を一次独立であるとよぶ。

（例）とくに，△OAB における $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は一次独立である。

ベクトル方程式

直線①



点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り，方向ベクトル $\vec{d}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の直線 l 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

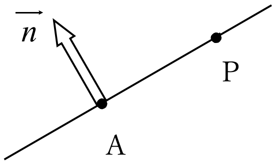
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

《補足》$\begin{cases} x=x_1+ta \\ y=y_1+tb \end{cases}$ より，　$t=\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$

$\therefore\ bx-ay-bx_1+ay_1=0$　←　確かに直線

直線②



点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ の直線 l 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix}=0$$

$$\therefore\ a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

《補足》$ax+by-(ax_1+by_1)=0$　←　確かに直線

$ax+by+c=0$　の法線ベクトルは，係数をとって $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ となる。

円①

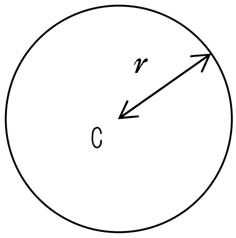
中心 C，半径 r の円上の点を P とすると，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r \quad \text{より，}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = r$$

ここで，$\mathrm{C}\left(\vec{c}\right)$，$\mathrm{P}\left(\vec{p}\right)$ とすると，

$$\left|\vec{p} - \vec{c}\right| = r$$



㊟　$\mathrm{C}(a, b)$，$\mathrm{P}(x, y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$ より，

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\therefore \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \leftarrow \quad \text{確かに円}$$

円②

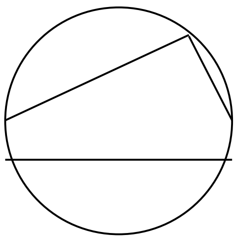
直径の両端を A，B とする円上の点を P とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BP}} \quad \text{より，} \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$

ここで，$\mathrm{A}\left(\vec{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(\vec{b}\right)$，$\mathrm{P}\left(\vec{p}\right)$ とすると，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = 0 \text{ より}$$

$$\left(\vec{p} - \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{p} - \vec{b}\right) = 0$$



㊟　$\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$，$\mathrm{P}(x, y)$ とすると，

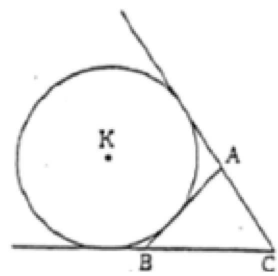
$$\begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_2 \\ y-y_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ より，}$$

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0 \quad \leftarrow \quad \text{確かに円}$$

傍心

【例題 01】

三角形 ABC を考える。辺 CA の A の方向への延長上および辺 CB の B の方向への延長上にそれぞれ接点をもち，さらに辺 AB に接する円の中心を K とする。また，AB=c，BC=a，CA=b とする。平面上に点 O をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$,$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$,$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および a,b,c で表せ



【例題 02】2011 杏林大学

平面上に 3 点 O，A，B があり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ とする。

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\boxed{\text{ア}}$ である。直線 AB 上に，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ となる点 C を取ると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

となる。

∠AOB の二等分線と線分 AB の交点を D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

三角形OAB において，∠AOB の二等分線と∠OAB の外角の二等分線の交点を E とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

となる。

また，点 E を中心とし，線分 AB に接する円の半径は $\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ である。

談話室マロニエ　数学 QUIZ　平面ベクトル

A 問題

ベクトルの演算は，和・差・実数倍・内積

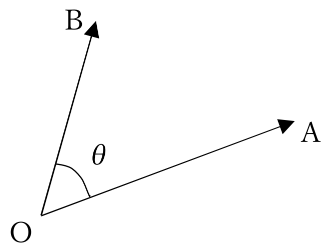
内分公式：点 P が線分 AB を $m:n$ に内分する点のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$ $\boxed{\text{ア}}$

外分する点のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$ $\boxed{\text{イ}}$

始点のとりかえ公式　始点を O に直すと，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$ $\boxed{\text{ウ}}$

3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\boxed{\text{エ}}$ と表せる。←適当な文字を使う。始点は A で。

右図で，ベクトルの内積は $\boxed{\text{オ}}$ ←両辺ともに書く。



内積の二大公式は，$\boxed{\text{カ}}$（←両辺ともに書く）と $\boxed{\text{キ}}$ のとき $\boxed{\text{ク}}$ である。

ただし，$\boxed{\text{カ}}$ より，<u>大きさ（長さ）といえば２乗</u>する（内積に持ち込む）

$\boxed{\text{キク}}$ より，<u>垂直といえば内積ゼロ</u>

B 問題

内分公式の証明のポイントは，$\boxed{\text{ケ}}$である。

ベクトルの役割　：　平面ベクトルでは 2 本のベクトル，たとえば $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を基準（基底と呼ぶ)，
平面上のすべての点 P を表すことができる。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
これを$\boxed{\text{コ}}$座標ということがある。

△ABC と平面上の点 P について，

$$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}\quad\cdots\cdots(*)$$ のとき，

(＊)は$\boxed{\text{サ}}$なので分かりにくい。$\boxed{\text{シ}}$と変形すれば，

△PBC：△PCA：△PAB＝$\boxed{\text{ス}}$

であることがわかる。

平面ベクトル・チェックリスト

○　ベクトルの演算　和と差と実数倍（直線上⇒実数倍)，そして内積
○　チェバ・メネラウスの定理，チェバ・メネラウスの定理の逆が図形問題では有効
○　ベクトルは図形問題を機械的に解くための道具である。
○　交点⇒連立　の考え方はベクトルでも同じ

○交点の位置ベクトルを求める問題
「解法１」メネラウスの定理
「解法２」線分比を文字設定＆係数比較
　ただし，基準となるベクトルは AB，AC
「解法３」直交座標に対応させる。
　解法としては大げさだが，
　「ベクトルが斜交座標である」という考え方に直結する解法である。

○　ベクトルの大きさ⇒二乗して内積計算に持ち込む
○　ベクトルのなす角⇒内積利用
○　ベクトルの垂直⇒内積ゼロ
○　ベクトルの平行⇒平行移動すれば・・・・「一直線上⇒実数倍すれば重なる」

○　「面積比＝無い文字の係数比」・・・空間でもある。
○　内心＝内接円中心＝内角の二等分線の交点
角の二等分線の性質×2 回　により線分比が求まる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

○　垂線の足　⇒　足の条件　＆　垂直条件
○　垂心＝各頂点から対辺に下した垂線の交点
斜交座標だから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　と文字設定　＆　内積ゼロ２回
○　外心＝外接円中心＝各辺の垂直二等分線の交点
斜交座標だから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　と文字設定
あとは「二等分条件」＆「垂直条件」
○　内積の図形的意味　「内積＝スクリーン×正射影」
○　平行四辺形の条件
（１）　AB＝DC　（ベクトルとして）
（２）　AB+AD＝AC　（ベクトルとして）
（３）　AC の中点＝BD の中点　←　平行四辺形の対角線は互いに他を二等分する

○　オイラー線
垂心 H，外心 O，重心 G とおくと，
（１）$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$
（２）$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}$
○　絶対値内単項式化

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより平面ベクトル篇

標準問題

⑫**7-標-1**

三角形 ABC の重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{b}$ とおく。

(1)　辺 BC を 1：2 の比に外分する点を D とし，辺 CA を 2：3 の比に外分する点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　2 点 D，E を(1)におけるものとし，線分 DE の中点を M とすれば，3 点 A，G，M は同一直線上にあることを証明せよ。

⑫**7-標-2**

△OAB において辺 OA を 5：2 に内分する点を C，辺 OB を 3：4 に内分する点を D，線分 CD の中点を M とする。線分 OM の延長が辺 AB と交わる点を N とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

⑫**7-標-3**

三角形 OAB において，辺 OA の中点を C とし，線分 BC を 4：3 に内分する点を D とする。線分 OD の延長が辺 AB と交わる点を E，線分 AD の延長が辺 OB と交わる点を F とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(2)　三角形 OAB と三角形 CEF の面積比を求めよ。

⑫**7-標-4**

(1)　平面上に△ABC と点 O があり，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。

△ABC の内心 I の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(2)　$\sin A\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\sin B\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\sin C\cdot\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

⑫7-標-5

平面上に四角形 ABCD と，この四角形の外部に点 E がある。これらの点から得られるベクトルについて，関係式

$$2\overrightarrow{\mathrm{AE}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{0}\ ,\ \ 8\overrightarrow{\mathrm{EA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=3\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right)$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　四角形 BCDE はどのような四角形か。

(2)　四角形 ABCD と四角形 BCDE の面積比を求めよ。

⑫7-標-6

平面上に△OAB があり，その面積を S とする。平面上の点 P に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表す。s, t が負でなく，$s+t\leq 1,\ 3s+4t\geq 2$ を満たしている。点 P の存在する範囲の面積を S で表せ。

⑫7-標-7

$\vec{a}, \vec{b}$ を長さ 1 のベクトルとする。$\vec{u}=4\vec{a}-5\vec{b},\ \vec{v}=2\vec{a}+\vec{b}$ が直交するとき，

(1)　$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ の値を求めよ。

(2)　$\vec{p}$ を長さ 1 のベクトルとするとき，内積 $\left(\vec{p}+\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}+\vec{b}\right)$ の最大値を求めよ。

⑫7-標-8

△ABC の外心を O，外接円の半径を 1 とする。

$$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+6\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

であるとき，辺 AB の長さを求めよ

⑫**7-標-9**

AB＝6，BC＝$5\sqrt{2}$，CA＝$\sqrt{26}$ である△ABC の外心を O とする。$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

⑫**7-標-10**

A，B，C は平面上の相異なる 3 点であって同一直線上にはないとする。このとき，その平面上の点 P で

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2-3\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}-6\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=0$$

という関係を満たすものの集合はどのような図形になるかを説明し，かつそれを図示せよ。

⑫**7-標-11**

△ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=a$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=b$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=c$ とおく。このとき，△ABC の面積を a, b, c で表せ。

発展問題

⑫7-発-1

$\triangle$ABC の辺 AB，BC，CA をそれぞれ 2：1 に内分する点をそれぞれ，A_1，B_1，C_1 とし，$\triangle A_1B_1C_1$ の辺 A_1B_1，B_1C_1，C_1A_1 を 2：1 に内分する点をそれぞれ A_2，B_2，C_2 とする。このとき，直線 AA_2，BB_2，CC_2 は$\triangle$ABC の重心で交わることを証明せよ。

⑫7-発-2

鋭角三角形 ABC の外心を O，垂心を H とするとき，次の(1)，(2)が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\sin 2A\cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \sin 2B\cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \sin 2C\cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$

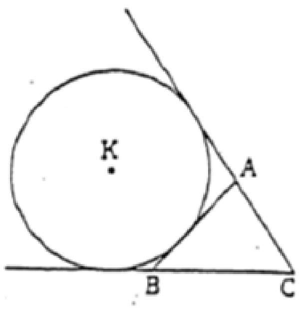
(2)　$\tan A\cdot \overrightarrow{\mathrm{HA}} + \tan B\cdot \overrightarrow{\mathrm{HB}} + \tan C\cdot \overrightarrow{\mathrm{HC}} = \vec{0}$

⑫7-発-3

三角形 ABC を考える。辺 CA の A の方向への延長上および辺 CB の B の方向への延長上にそれぞれ接点をもち，さらに AB に接する円の中心を K とする。また，$\mathrm{AB}=c,\ \mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b$ とする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ を，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ および，a, b, c で表せ。

(2)　さらに平面上に点 O をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および，a, b, c で表せ。



⑫**7-発-4**

△ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P，Q，R とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+3\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$$

が成立しているとする。このとき，

(1)　∠A の大きさを求めよ。

(2)　△ABC の外接円の半径を 1 とするとき，△ABC の面積を求めよ。

⑫**7-発-5**

△ABC に対し，

$$\vec{p}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

とする。

(1)　△ABC が正三角形ならば，$\vec{p}=\vec{0}$ であることを示せ。

(2)　$\vec{p}=\vec{0}$ ならば，△ABC は正三角形であることを示せ。

⑫**7-発-6**

平面上に三角形 ABC がある。実数 t が $0\leq t\leq 1$ の範囲で動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2t\overrightarrow{\mathrm{BP}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$$

を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルを表す。

⑫$\boxed{7\text{-発-}7}$

平面上に 3 つの定点 O，A，B が与えられ，OA＝3，OB＝2，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ を満たしている。

(1)　実数 s, t が $s\geq 0, t\geq 0, 0\leq s+t\leq 1$ を満たしながら変わるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の終点 P が動く領域の面積を求めよ。

(2)　点 P が(1)の領域を動き，点 Q が点 A を中心とする半径 1 の円の周および内部を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の終点 R が動く領域の面積を求めよ。

SoyPaste 平面ベクトル

SP⑫7-1(r1-1)

xy 平面上に 3 点 O(0, 0)，A(3, 0)，B(1, 1) をとる．実数 s，t が，

$$s \geqq 0, \quad t \geqq 0, \quad s+2t \leqq 1$$

を満たして動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 P の動く範囲の面積を求めよ．

SP⑫7-2 (r10-2)

三角形 OAB において，辺 OB の中点を M，辺 OA を $h : (1-h)$ $(0<h<1)$ に内分する点を D とし，線分 AM，BD の交点を E とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ および h を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 4$，$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ のとき，h の値を求めよ．

SP⑫7-3 (r34-2)

$\overrightarrow{a} = (4,\ 3)$，$\overrightarrow{b} = (x,\ -4)$ とする．このとき，$3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ と $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ が平行になるのは $x = (\quad)$ のときで，垂直になるのは $x = (\quad)$ のときである．

SP⑫7-4 (j1-3)　○

三角形 ABC において $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である点 O が三角形 ABC の外心であり，三角形 ABC の外接円の半径は r であるとする．このとき，辺 AB の長さを求めよ。

SP⑫7-5 (j2-2)　△

Oを原点とする座標平面上に，2点A(1，2)，B(2，1)がある．この平面上の動点Pは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表されるものとする．

実数 s，t が不等式 $s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$2 \leqq s+t \leqq 3$ を満たすすべての値をとるとき，Pの動く領域の面積は(　　)である．

SP⑫7-6 (s2-2)　○

平面上において，原点Oと2点A(1，1)，B(2，1)に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定められる点Pについて考える．

(1)　定数 s，t が条件 $s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$1 \leqq s+t \leqq 3$ を満たしながら変わるとき，点Pの描く図形の面積を求めよ．

(2)　(1)の点Pに対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の最大値と最小値を求めよ．

SP⑫7-7 (s3-2)　○

$\angle \mathrm{A}=60^\circ$ である三角形ABCに内接する半径1の円の中心をIとし，3辺BC，CA，ABと，この円との接点をそれぞれP，Q，Rとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{IP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{IQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{IR}}$ は，

$$7\overrightarrow{\mathrm{IP}}+5\overrightarrow{\mathrm{IQ}}+s\overrightarrow{\mathrm{IR}}=\overrightarrow{0}$$

を満たすとする．ただし，$s>0$ とする．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{IQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IR}}$ を求めよ．

(2)　s の値を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{IR}}$ のなす角を α とするとき，$\cos 2\alpha$ および $\tan\alpha$ の値を求めよ．

(4)　三角形IABの面積を求めよ．

SP⑫7-8 (j10-2)　△

平行四辺形ABCDの辺CD，DAを1：2に内分する点をそれぞれE，Fとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ をそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 頂点Aを通り，直線BDに平行な直線と線分EFの延長との交点をLとするとき，EF：FLを求めよ．

(3) 線分AEと線分BFの交点をPとするとき，AP：PEおよびBP：PFを求めよ．

SP⑫7-9 (j16-3)　○

座標平面上でOを原点とし，直線 l_1 : $y=2x$ 上の点Pと直線 l_2 : $y=-2x$ 上の点Qの中点を $\mathrm{M}(x,\ y)$ とする．P，Qが内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3$ を満たしながら，それぞれ l_1，l_2 上を動くとき，点Mの軌跡の方程式を x，y を用いて表せ．

SP⑫7-10 (j24-2)　○

正六角形ABCDEFにおいて，辺DEの中点をPとし，線分APとBFの交点をQとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を用いて表せ．

(2) AQ：QPを最も簡単な整数比で表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$ のとき，三角形BPQの面積を求めよ．

SP⑫7-11 (j25-3)　△

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，

$$|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=2,\quad |\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$$

を満たすとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\qquad)$ である．

また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta=(\qquad)$ となる．

SP⑫7-12 (s25-3)　☆

三角形 OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，

$$|\vec{a}|=1,\quad |\vec{a}+\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$$

が成り立つ．

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の値を求めよ．

(2)　点 P が三角形 OAB の外接円上を動くとき，三角形 PAB の面積の最大値を求めよ．

(3)　点 Q が O を中心とし，半径 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ の円上を動くとき，三角形 QAB の面積の最大値を求めよ．

SP⑫7-13 (j27-3)　○

平行四辺形 ABCD において，対角線 BD の中点を E，辺 AD を 3 : 2 に内分する点を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1)　三角形 BCD の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(2)　直線 AE と直線 BF の交点を S とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(3)　線分 AC の長さが 36 のとき，線分 SG の長さを求めよ．

SP⑫7-14 (s31-2)　(1)(2)○　(3)☆

xy 平面の原点 O を中心とし半径 1 の円 C 上に定点 A をとる．同じ円上の点 X に対し，平面上の点 Y を

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}})\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

で定める．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の内積である．

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OY}}|=1$ であることを示せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 X をすべて求めよ．

(3)　点 X が円 C を 1 回まわるとき，点 Y は同じ円を 2 回まわることを示せ．

SP⑫7-15 (j34-1)

平面上に平行でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ があり，$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$ とする．

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ のなす角と，$\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ のなす角が等しくなるように実数 t の値を定めよ．

(2)　$|\vec{a}-2\vec{b}|$ のとり得る値の範囲を求めよ．また，$|\vec{a}-2\vec{b}|=4$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

SP⑫7-16 (s39-1)　☆

三角形 ABC において，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする．また，三角形 ABC の外心を O，内心を I とし，外接円の半径を R とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$ を示せ．

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2=R^2-\dfrac{abc}{a+b+c}$ を示せ．

SP⑫7-17 (s1-2)　☆

平面上に原点 O から出る，異なる 2 本の半直線 OX，OY をとり $\angle\mathrm{XOY} < 180^\circ$ とする．半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする．

(1) 点 C が $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

と表されることを示せ．

(2) $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線と $\angle\mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とする．$\mathrm{OA} = 2$，$\mathrm{OB} = 3$，$\mathrm{AB} = 4$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

SP⑫7-18 (s9-2)　☆

平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする．

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}, \qquad \vec{b} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$$

とし，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} > 0$ であるようにとる．直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}| = \dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ．