試験時間50分　　解答は<u>解答用紙</u>に書いて、提出してください

1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[10^n\pi]}{10^n}$ の値を求めよ。ただし，$[x]$ は，実数 x に対して，$m \leqq x < m+1$ を満たす整数 m である。（答えだけで良い）

2 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-6x+8}$ で $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=6$ とすると，

$a=$ ア $\boxed{}$，$b=$ イ $\boxed{}$ である．

更に，$\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=-10$ とすると，

$c=$ ウ $\boxed{}$，$d=$ エ $\boxed{}$ である．

3 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}$ を求めよ．

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{\sin x}$ を求めよ。

5 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin(\log(x+1)-\log x)$ を求めよ。ここで，対数は自然対数である。

6 関数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\leqq 1) \\ \dfrac{ax+b}{x+1} & (x>1) \end{cases}$ が $x=1$ で微分可能であるとき，a，b の値を求めよ．

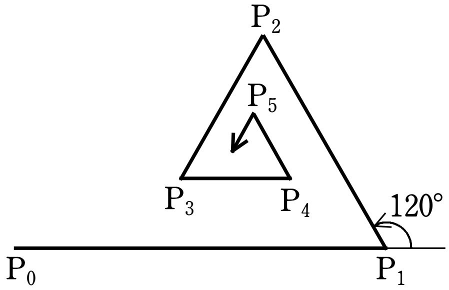
7 直線 $y=x$ と放物線 $y=(x-n)^2$ で囲まれた図形の面積を S_n とする（n は自然数）．このとき，$L=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^\alpha}$ が存在して，かつ $L\neq 0$ となるのは $\alpha=\boxed{}$ のときである．

8 数列 $\{a_n(x)\}$ は $a_n(x)=\dfrac{\sin^{2n+1}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ で定められたものとする．

(1) この数列の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n(x)$ を $A(x)$ とおくとき，関数 $y=A(x)$ のグラフを図示せよ．

9 座標平面上で，動点Pが原点 $P_0(0,\ 0)$ を出発して，点 $P_1(1,\ 0)$ へ動き，更に，図のように $120°$ ずつ向きを変えて P_2，P_3，……，P_n，…… と動くものとする．ただし，$P_nP_{n+1}=\alpha P_{n-1}P_n$ $(0<\alpha<1,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．



(1) P_0 から P_n まで動点Pがたどる道のりを l_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}l_n$ を求めよ．

(2) P_0，P_3，P_6，……，P_{3n}，…… の近づく点の座標を求めよ．

$\boxed{1}$ 解答 π

$\boxed{2}$ 解答 (ア) 0　(イ) 6　(ウ) -4　(エ) -16

$\boxed{3}$ 解答 $\dfrac{1}{3}$

$\boxed{4}$ 解答 2

$\boxed{5}$ 解答 1

$\boxed{6}$ 解答 $a=6$, $b=-2$

$\boxed{7}$ 解答 $\dfrac{3}{2}$

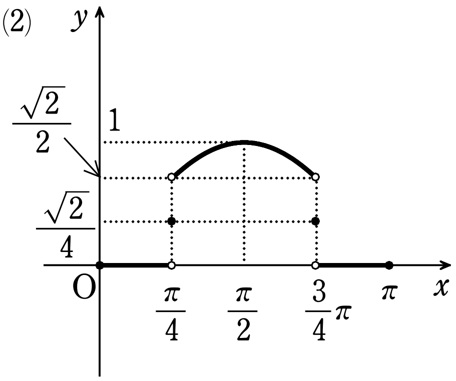
$\boxed{8}$ 解答 (1) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi < x \leqq \pi$ のとき　0；

$x=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\sin x$

(2) 〔図〕

(2)



$\boxed{9}$ 解答 (1) $\dfrac{1}{1-\alpha}$　(2) $\left(\dfrac{2+\alpha}{2(\alpha^2+\alpha+1)},\ \dfrac{\sqrt{3}\,\alpha}{2(\alpha^2+\alpha+1)}\right)$

1　$[10^n\pi] \leqq 10^n\pi < [10^n\pi]+1$ が成り立つから

$$\frac{[10^n\pi]}{10^n} \leqq \pi < \frac{[10^n\pi]+1}{10^n} \quad \text{すなわち} \quad \frac{[10^n\pi]}{10^n} \leqq \pi < \frac{[10^n\pi]}{10^n}+\frac{1}{10^n}$$

よって　$\pi-\dfrac{1}{10^n} < \dfrac{[10^n\pi]}{10^n} \leqq \pi$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\pi-\frac{1}{10^n}\right)=\pi$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\pi=\pi$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[10^n\pi]}{10^n}=\pi$

2　$x \neq 0$ のとき $f(x)$ の分母・分子を x^3 で割って　$f(x)=\dfrac{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{d}{x^3}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=6$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x^3}\right)=0$

であることが必要．ゆえに　$a=0$

よって $f(x)=\dfrac{bx^2+cx+d}{x^2-6x+8}$ であり，$x \neq 0$ のとき　$f(x)=\dfrac{b+\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{x^2}}{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{x^2}}$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{b}{1}=b$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=6$ から　$b=6$

よって　$f(x)=\dfrac{6x^2+cx+d}{x^2-6x+8}=\dfrac{6x^2+cx+d}{(x-2)(x-4)}$

$\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)(x-4)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to 2}(6x^2+cx+d)=0$ であることが必要．

ゆえに　$6\cdot 2^2+2c+d=0$　すなわち　$d=-2c-24$ ……①

このとき　$6x^2+cx+d=6x^2+cx-2c-24$
$\qquad\qquad\qquad\qquad=(x-2)(6x+c+12)$

よって
$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(6x+c+12)}{(x-2)(x-4)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{6x+c+12}{x-4}=\frac{6\cdot 2+c+12}{2-4}=-\frac{24+c}{2}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=-10$ から　$-\dfrac{24+c}{2}=-10$

よって　$c=-4$

したがって，① から　$d=-2(-4)-24=-16$

逆に，$a={}^{ア}0$，$b={}^{イ}6$，$c={}^{ウ}-4$，$d={}^{エ}-16$ のとき題意を満たす．

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3x}\cdot\frac{1+x-(1-x)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right\}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$\boxed{4}$ (与式)$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{e^x-1}{x}+1}{\dfrac{\sin x}{x}}$

$f(x)=e^x$ とおくと　　$f'(x)=e^x$

よって　　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$

ゆえに　　(与式)$\displaystyle=\frac{1+1}{1}=2$

$\boxed{5}$ $\displaystyle x\sin(\log(x+1)-\log x)=x\sin\left(\log\frac{x+1}{x}\right)=x\sin\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

$$=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{\sin\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\frac{\sin\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$x\to\infty$ のとき，$\displaystyle\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to e$，$\displaystyle\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\to0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}x\sin(\log(x+1)-\log x)=\log e\cdot1=1$$

$\boxed{6}$ $f(x)$ は $x=1$ で連続であるから

$$2=f(1)=\lim_{x\to1+0}\frac{ax+b}{x+1}=\frac{a+b}{2}$$

ゆえに　$a+b=4$ ……①

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{(1+h)^2+1-2}{h}=\lim_{h\to-0}(2+h)=2,$

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\dfrac{a(1+h)+b}{2+h}-\dfrac{a+b}{2}}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{a-b}{2(2+h)}=\frac{a-b}{4}$

$f(x)$ は $x=1$ で微分係数をもつから　$\dfrac{a-b}{4}=2$　　ゆえに　$a-b=8$ ……②

①，②から　$a=6$，$b=-2$

$\boxed{7}$ $(x-n)^2=x$ から　$x^2-(2n+1)x+n^2=0$

この方程式の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと

$$\alpha+\beta=2n+1,\ \alpha\beta=n^2$$

ゆえに　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(2n+1)^2-4n^2=4n+1$

よって　$S_n=\int_\alpha^\beta\{x-(x-n)^2\}dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(4n+1)^{\frac{3}{2}}$

したがって，$L=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^\alpha}$ が存在して，かつ $L\neq 0$ となるのは　$\alpha=\frac{3}{2}$

$\boxed{8}$ (1)　[1]　$0\leqq x<\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi<x\leqq\pi$ のとき

$0\leqq\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}<1$ から　$\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cdot\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^n}{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^n+1}=0$

[2]　$x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$ のとき

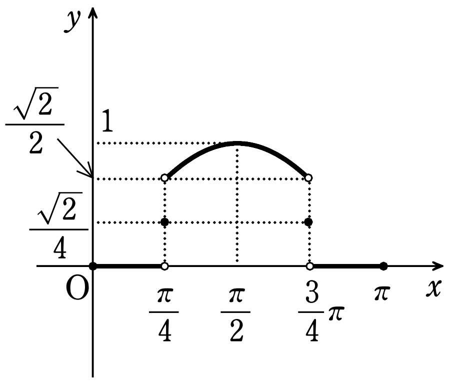
$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=1$ から　$\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{1+\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)^n}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

[3]　$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$ のとき

$0\leqq\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}<1$ から　$\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{1+\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)^n}=\sin x$

(2)　$A(x)=\begin{cases}0 & \left(0\leqq x<\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi<x\leqq\pi\right)\\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \left(x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right)\\ \sin x & \left(\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi\right)\end{cases}$

〔図〕



$\boxed{9}$ (1)　$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}=\alpha\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$，$0<\alpha<1$ から

$$\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^{n-1})=\frac{1}{1-\alpha}$$

(2)　複素数平面上で点 P_n の表す複素数を z_n とすると

$$z_{n+1}-z_n=\alpha(z_n-z_{n-1})(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$$

ゆえに

$$z_{n+1}-z_n=\{\alpha(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)\}^n(z_1-z_0)$$
$$=\{\alpha(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)\}^n\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

よって　$z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \{ \alpha (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \}^k$

$= \dfrac{1 - \{ \alpha (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \}^n}{1 - \alpha (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)}$

から　$z_{3n} = \dfrac{1 - \{ \alpha (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \}^{3n}}{1 - \dfrac{\alpha}{2} (-1 + \sqrt{3} i)} = \dfrac{2 (1 - \alpha^{3n})}{2 + \alpha - \sqrt{3} \alpha i}$

したがって，$0 < \alpha < 1$ から　$\lim_{n \to \infty} z_{3n} = \dfrac{2}{2 + \alpha - \sqrt{3} \alpha i} = \dfrac{2 + \alpha + \sqrt{3} \alpha i}{2 (\alpha^2 + \alpha + 1)}$

ゆえに，座標平面上で P_n は点 $\left(\dfrac{2 + \alpha}{2 (\alpha^2 + \alpha + 1)}, \dfrac{\sqrt{3} \alpha}{2 (\alpha^2 + \alpha + 1)} \right)$ に近づく.