談話室マロニエ

SoyPaste
演習期の数学

7 複素平面

7-1 (r3-1)

a が実数全体を動くとき，z の 2 次方程式

$$z^2 - 2az + 2a^2 - 1 = 0$$

の解を表す点は，複素数平面上でどのような図形を描くか，図示せよ．

$$z^2 - 2az + 2a^2 - 1 = 0 \qquad \cdots (*)$$

の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = a^2 - (2a^2 - 1) = 1 - a^2$$

であるから，a の値で場合分けする．

（i）　$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき，

$$D \geqq 0$$

であるから，$(*)$ は実数解をもつ．

また，$(*)$ より，

$$(z-a)^2 + a^2 = 1$$

であるから，実数 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，

$$\begin{cases} z - a = \cos\theta, \\ a = \sin\theta. \end{cases}$$

このとき，

$$z = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，

$$-\sqrt{2} \leqq z \leqq \sqrt{2}.$$

（ii）　$|a| > 1$ のとき，

$$D < 0$$

であるから，$(*)$ は虚数解をもつ．

このとき，$(*)$ の解は，

$$z = a \pm \sqrt{a^2 - 1}\, i$$

であるから，

$$z = x + yi \quad (x,\ y \text{ は実数})$$

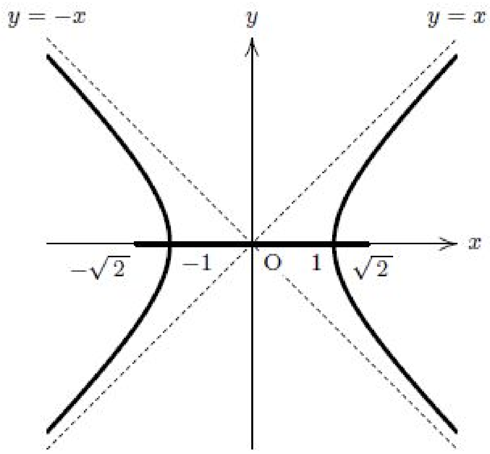
とすると，

$$\begin{cases} x = a, \\ y = \pm\sqrt{a^2 - 1}. \end{cases}$$

a を消去すると，

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ |x| > 1. \end{cases}$$

（i），（ii）より，$(*)$ の解を表す点を複素数平面上に描くと，次の図の太線部分である．



7-2 (r22-1)

$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$ を満たす複素数 z のうち，虚部が最大であるものを求めよ．
ただし，i は虚数単位とする．

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i \qquad \cdots ①$$

の右辺を極形式に直すと，

$$z^4 = 16\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right). \qquad \cdots ②$$

さらに，

$$\begin{cases} r > 0, \\ 0 \leqq \theta < 2\pi \end{cases} \qquad \cdots ③$$

を用いて，

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とすると，ド・モアブルの定理より，

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta). \qquad \cdots ④$$

②，④より，

$$\begin{cases} r^4 = 16, \\ 4\theta = \dfrac{2}{3}\pi + 2n\pi \end{cases}$$

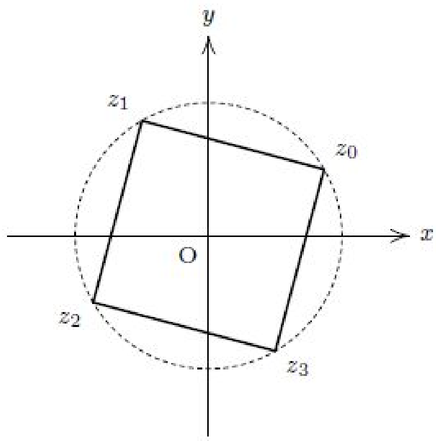
であるから，③より，

$$\begin{cases} r = 2, \\ \theta = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n}{2}\pi. \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \end{cases}$$

これより，$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ に対して，

$$z_n = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n}{2}\pi\right)\right\}$$

とすると，z_0，z_1，z_2，z_3 は①の解であり，これらを複素数平面上に図示すると，次の図の正方形の 4 つの頂点である．



図より，①の解のうち，虚部が最大であるものは，

$$z_1 = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= -1 + \sqrt{3}i.$$

7-3 (r34-1)

複素数平面上の 3 点 O(0)，A(α)，B(β) を頂点とする三角形 OAB の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{4}\left|\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}\right|$$

と表されることを示せ．ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ はそれぞれ α，β と共役な複素数とする．

実数 x_1，y_1，x_2，y_2 を用いて，

$$\begin{cases} \alpha = x_1 + y_1 i, \\ \beta = x_2 + y_2 i \end{cases}$$

とし，座標平面上で考えると，

$$S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|. \qquad \cdots ①$$

また，

$$\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta} = (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) - (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)$$
$$= 2(x_1y_2 - x_2y_1)i$$

であるから，

$$\frac{1}{4}|\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}| = \frac{1}{4}|2(x_1y_2 - x_2y_1)i|$$
$$= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$S = \frac{1}{4}|\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}|.$$

7-4 (r36-2)

0でない異なる2つの複素数α，βがあり，$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$，$|\alpha-\beta|=2$を満たす．

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$を求めよ．

(2) 複素数平面上で，0，α，βを表す点をそれぞれO，A，Bとするとき，三角形OABの面積を求めよ．

(1)　$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$ の両辺を β^2 で割ると，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-\frac{\alpha}{\beta}+1=0$$

であるから，

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

(2)　(1) の結果より，

$$\frac{\alpha}{\beta}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから，

$$\begin{cases}\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=1,\\ \arg\dfrac{\alpha}{\beta}=\pm\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

これより，

$$\begin{cases}\mathrm{OA}=\mathrm{OB},\\ \angle\mathrm{AOB}=60^\circ.\end{cases}\qquad\cdots①$$

また，$|\alpha-\beta|=2$ より，

$$\mathrm{AB}=2.\qquad\cdots②$$

①，②より，三角形OABは1辺の長さが2の正三角形であるから，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot2^2\sin60^\circ\\&=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

7-5 (r40-1)

複素数平面上で点zが2点$1-\dfrac{i}{2}$，$-\dfrac{1}{2}+i$を通る直線上を動くとき，$\dfrac{1}{z}$はどのような図形を描くか．

実数 x, y を用いて，$z=x+yi$ と表すとき，点 z が 2 点 $1-\frac{i}{2}$, $-\frac{1}{2}+i$ を通ることから，

$$\begin{cases} x+yi=1-\frac{1}{2}i, \\ x+yi=-\frac{1}{2}+i. \end{cases}$$

これより，

$$(x,\ y)=\left(1,\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$$

であるから，

$$x+y=\frac{1}{2}. \qquad \cdots ①$$

さらに，$w=\frac{1}{z}$ において，

$$w\neq 0 \qquad \cdots ②$$

であり，

$$z=\frac{1}{w}. \qquad \cdots ③$$

ここで，実数 u, v を用いて，

$$w=u+vi$$

と表すとき，③より，

$$\begin{aligned} x+yi&=\frac{1}{u+vi} \\ &=\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{v}{u^2+v^2}i \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2}, \\ y=-\frac{v}{u^2+v^2}. \end{cases} \qquad \cdots ④$$

①，④より，

$$\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{1}{2}$$

であるから，

$$u^2+v^2=2u-2v$$

$$(u-1)^2+(v+1)^2=2. \qquad \cdots ⑤$$

②，⑤より，点 w は，

点 $1-i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

を描く．ただし，原点は除く．

7-6 (j3-3)

複素数平面上の相異なる 3 点 A(α), B(β), C(γ) に対して，

$$(3+9i)\alpha-(8+4i)\beta+(5-5i)\gamma=0$$

が成り立つとき，次の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ の実部と虚部を求めよ．

(2) $\angle\mathrm{ACB}$ の大きさと $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(1) 条件

$$(3+9i)\alpha-(8+4i)\beta+(5-5i)\gamma=0$$

より，

$$(8+4i)\beta=(3+9i)\alpha+(5-5i)\gamma$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}&=\frac{(8+4i)(\beta-\gamma)}{(8+4i)(\alpha-\gamma)}\\&=\frac{(3+9i)\alpha+(5-5i)\gamma-(8+4i)\gamma}{(8+4i)(\alpha-\gamma)}\\&=\frac{(3+9i)(\alpha-\gamma)}{(8+4i)(\alpha-\gamma)}\\&=\frac{(3+9i)(8-4i)}{8^2+4^2}\\&=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i.\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$ の実部，虚部はともに，

$$\frac{3}{4}.$$

(2) (1) より，

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，

$$\begin{cases}\angle\mathrm{ACB}=45^\circ,\\ \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$$

(3) (2) の結果より，実数 t を用いて，

$$\mathrm{BC}=3\sqrt{2}t,\quad \mathrm{AC}=4t$$

とおけるから，三角形 ABC に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(3\sqrt{2}t)^2+(4t)^2-2\cdot 3\sqrt{2}t\cdot 4t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=10t^2.\end{aligned}$$

これより，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{10}\,t$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

7-7 (s3-1)

x に関する方程式

$$x^5+x^4-x^3+x^2-(a+1)x+a=0$$

が，虚軸上の複素数を解にもつような実数 a をすべて求めよ．

虚軸上の複素数 α は，実数 t を用いて，

$$\alpha=ti$$

とおける．

α が方程式

$$x^5+x^4-x^3+x^2-(a+1)x+a=0 \qquad \cdots(*)$$

の解である条件は，

$$(ti)^5+(ti)^4-(ti)^3+(ti)^2-(a+1)ti+a=0$$

であるから，

$$t^5i+t^4+t^3i-t^2-(a+1)ti+a=0$$

$$t^4-t^2+a+i\{t^5+t^3-(a+1)t\}=0.$$

ここで，t，a は実数，i は虚数であるから，

$$\begin{cases}t^4-t^2+a=0,\\ t^5+t^3-(a+1)t=0.\end{cases}$$

a を消去すると，

$$t^5+t^3-\{(t^2-t^4)+1\}t=0$$

$$t(2t^4-1)=0$$

であるから，t は実数より，

$$t=0 \text{ または } t^2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$t=0$ のとき，

$$a=0.$$

$t^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，

$$a=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

以上より，求める a の値は，

$$a=0,\quad \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

7-8 (s7-1)

$t=\cos\theta$ とする．自然数 n について，ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

が成り立つことにより $\cos n\theta$ を t の n 次多項式として表すことができる．この多項式を $f_n(t)$ とし，変数 t についての $f_n(t)$ の導関数を $f_n{}'(t)$ とする．

(1) $f_6(t)$ を求めよ．

(2) 自然数 m について $f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数を求めよ．

(3) $\{f_n(t)\}^2+(1-t^2)\left\{\dfrac{1}{n}f_n{}'(t)\right\}^2=1$ が成り立つことを示せ．

複素数 z の実部を $\mathrm{Re}(z)$ と表すこととする．

(1) ド・モアブルの定理より，

$$\begin{aligned}\cos 6\theta&=\mathrm{Re}((\cos\theta+i\sin\theta)^6)\\&=\cos^6\theta-15\cos^4\theta\sin^2\theta+15\cos^2\theta\sin^4\theta-\sin^6\theta\end{aligned}$$

であるから，$f_6(t)$ の定め方より，

$$\begin{aligned}f_6(t)&=t^6+15t^4(t^2-1)+15t^2(t^2-1)^2+(t^2-1)^3\\&=32t^6-48t^4+18t^2-1.\end{aligned}$$

(2) (1) と同様にすると，

$$\begin{aligned}\cos 2m\theta&=\mathrm{Re}((\cos\theta+i\sin\theta)^{2m})\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k}\cos^{2m-2k}\theta\cdot i^{2k}\cdot\sin^{2k}\theta\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k}\cos^{2m-2k}\theta\cdot(-\sin^2\theta)^k\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k}\cos^{2m-2k}\theta(\cos^2\theta-1)^k\end{aligned}$$

であるから，$f_{2m}(t)$ の定め方より，

$$f_{2m}(t)=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k}t^{2m-2k}(t^2-1)^k.$$

これより，$f_{2m}(t)$ の t^{2m} の係数を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k}\\&={}_{2m}\mathrm{C}_0+{}_{2m}\mathrm{C}_2+{}_{2m}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{2m}\mathrm{C}_{2m}.\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{cases}{}_{2m}\mathrm{C}_0+{}_{2m}\mathrm{C}_1+{}_{2m}\mathrm{C}_2+{}_{2m}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{2m}\mathrm{C}_{2m}=(1+1)^{2m}\\{}_{2m}\mathrm{C}_0-{}_{2m}\mathrm{C}_1+{}_{2m}\mathrm{C}_2-{}_{2m}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{2m}\mathrm{C}_{2m}=(1-1)^{2m}\end{cases}$$

であるから，

$$2({}_{2m}\mathrm{C}_0+{}_{2m}\mathrm{C}_2+{}_{2m}\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{2m}\mathrm{C}_{2m})=2^{2m}.$$

したがって，

$$S=2^{2m-1}.$$

(3) $f_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ の両辺を θ で微分すると，

$$f_n{}'(\cos\theta)(-\sin\theta)=-n\sin n\theta$$

であるから，

$$f_n{}'(\cos\theta)=\frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}&\{f_n(t)\}^2+(1-t^2)\left\{\frac{1}{n}f_n{}'(t)\right\}^2\\&=\{f_n(\cos\theta)\}^2+(1-\cos^2\theta)\left\{\frac{1}{n}f_n{}'(\cos\theta)\right\}^2\\&=\cos^2 n\theta+\sin^2\theta\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^2\\&=1\end{aligned}$$

であるから，示せた．

7-9 (j12-4)

複素数 z を与えたとき，複素数 w は，

$$w=\frac{z+p}{qz+r}$$

で定まるものとする．ただし，p，q，r は複素数の定数である．$z=0$，i，$-i$ のとき w は それぞれ $w=1$，-1，0 となる．

(1) p，q，r を求めよ．

(2) $|w|=1$ を満たすような z の集合を複素数平面上に図示せよ．

(1) 条件より，

$$\begin{cases} \dfrac{p}{r}=1, \\ \dfrac{i+p}{qi+r}=-1, \\ \dfrac{-i+p}{-qi+r}=0 \end{cases}$$

であるから，q は実数より，

$$p=i,\quad q=-3,\quad r=i.$$

(2) (1) の結果より，

$$w=\frac{z+i}{-3z+i}$$

であるから，$|w|=1$ のとき，

$$\left|\frac{z+i}{-3z+i}\right|=1.$$

これより，

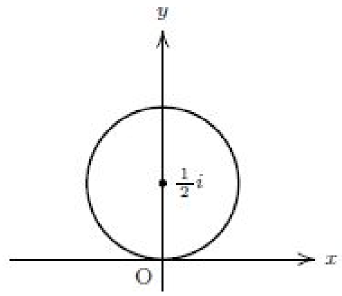
$$|z+i|=|3z-i|$$

$$(z+i)(\overline{z}-i)=(3z-i)(3\overline{z}+i)$$

$$z\overline{z}+\frac{i}{2}z-\frac{i}{2}\overline{z}=0$$

$$\left|z-\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$$

であるから，点 z の集合を図示すると，次の図の，点 $\frac{1}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である．



7-10 (s12-1)

$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 z ($z\neq 0$) を表す複素数平面上の点の集合を，式で表し，図示せよ．

$0 \leqq \dfrac{z}{2} + \dfrac{1}{z} \leqq 2$ より，

$$0 \leqq z + \frac{2}{z} \leqq 4 \qquad \cdots (*)$$

を満たす複素数 z について考える．

（i）　z が実数のとき，$(*)$ より，

$$\begin{cases} z > 0, \\ z^2 - 4z + 2 \leqq 0 \end{cases}$$

であるから，

$$2 - \sqrt{2} \leqq z \leqq 2 + \sqrt{2}.$$

（ii）　z が虚数のとき，正の実数 r と

$$0 < \theta < 2\pi \text{ かつ } \theta \neq \pi$$

を満たす θ を用いて，

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおける．

このとき，

$$\begin{aligned} z + \frac{2}{z} &= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{2}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{2}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= \left(r + \frac{2}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{2}{r}\right)\sin\theta \end{aligned}$$

であるから，$(*)$ が成り立つための条件は，

$$\begin{cases} r - \dfrac{2}{r} = 0, \\ 0 \leqq \left(r + \dfrac{2}{r}\right)\cos\theta \leqq 4. \end{cases}$$

$r > 0$ より，

$$\begin{cases} r = \sqrt{2}, \\ 0 \leqq \cos\theta \leqq \sqrt{2} \end{cases}$$

であるから，$0 < \theta < 2\pi$ かつ $\theta \neq \pi$ より，

$$\begin{cases} r = \sqrt{2}, \\ 0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, \quad \dfrac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

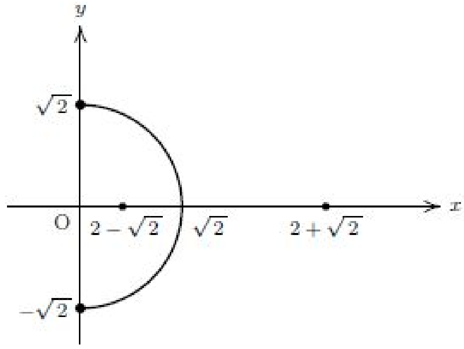
（i），（ii）より，複素数 z を表す点の集合は，

$$2 - \sqrt{2} \leqq z \leqq 2 + \sqrt{2}$$

または，

$$z = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \left(0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2} \text{ または } \frac{3}{2}\pi \leqq \theta < 2\pi\right).$$

これを図示すると，次の図の太線部分である．



7-11 (j24-4)

$(1+i)^n + (1-i)^n = 32$ を満たす最小の整数 n の値を求めよ．

$1+i$，$1-i$ を極形式に直すと，

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n}{4}\pi + i\sin\frac{n}{4}\pi\right),$$

$$(1-i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n}{4}\pi - i\sin\frac{n}{4}\pi\right).$$

したがって，

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n}{4}\pi$$

であるから，

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 32 \qquad \cdots ①$$

のとき，

$$(\sqrt{2})^n\cos\frac{n}{4}\pi = 16. \qquad \cdots ②$$

ここで，

$$\cos\frac{n}{4}\pi = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0 \pmod 8 \text{ のとき}), \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & (n \equiv 1 \pmod 8 \text{ のとき}), \\ 0 & (n \equiv 2 \pmod 8 \text{ のとき}), \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & (n \equiv 3 \pmod 8 \text{ のとき}), \\ -1 & (n \equiv 4 \pmod 8 \text{ のとき}), \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & (n \equiv 5 \pmod 8 \text{ のとき}), \\ 0 & (n \equiv 6 \pmod 8 \text{ のとき}), \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & (n \equiv 7 \pmod 8 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，②が成り立つためには，n を 8 で割った余りは，

$$0,\ 1,\ 7$$

のときが必要である．

さらに，

$$\cos\frac{n}{4}\pi \leqq 1$$

であるから，②が成り立つためには，

$$n \geqq 8$$

であることが必要である．

ここで，$n = 8$ のとき，

$$(\text{②の左辺}) = 16$$

であるから，②は成り立つ．

以上より，①を満たす最小の整数 n の値は，

$$n = 8.$$

7-12 (s27-3)

実数を係数とする3次方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

は，相異なる虚数解 α，β と実数解 γ をもつとする．

(1) $\beta=\overline{\alpha}$ が成り立つことを証明せよ．ここで，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．

(2) α，β，γ が等式 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ を満たし，さらに複素数平面上で α，β，γ を表す3点は一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形をなすものとする．このとき，実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ．

(1) $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ とすると，α が $f(x)=0$ の解である条件は，

$$f(\alpha)=0.$$

このとき，

$$\begin{aligned} f(\overline{\alpha}) &= (\overline{\alpha})^3+p(\overline{\alpha})^2+q\cdot\overline{\alpha}+r \\ &= \overline{\alpha^3}+\overline{p\alpha^2}+\overline{q\alpha}+\overline{r} \\ &= \overline{\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r} \\ &= \overline{f(\alpha)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから，$\overline{\alpha}$ は $f(x)=0$ の解である．

さらに，α が虚数であることから，

$$\overline{\alpha}\neq\alpha$$

であり，$f(x)=0$ が異なる虚数解 α，β をもつことから，

$$\beta=\overline{\alpha}.$$

(2) (1)より，α と β は共役であるから，α，β の表す2点は実軸に関して対称である．

さらに，α，β，γ を表す3点が一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形であるから，

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\gamma-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \gamma-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \qquad \cdots ①$$

または，

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\gamma+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \gamma+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \qquad \cdots ②$$

としてよい．

また，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ であるから，

$$\begin{aligned} ① &\iff \left(\gamma-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+\gamma(2\gamma-3)=3 \\ &\iff 3\gamma(\gamma-2)=0 \\ &\iff \gamma=0,\ 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② &\iff \left(\gamma+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+\gamma(2\gamma+3)=3 \\ &\iff 3\gamma(\gamma+2)=0 \\ &\iff \gamma=0,\ -2. \end{aligned}$$

したがって，$f(x)=0$ の3つの解は，

(i) $-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ 0,$

(ii) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ 2,$

(iii) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ 0,$

(iv) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ -2.$

さらに，

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-p, \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q, \\ \alpha\beta\gamma=-r \end{cases}$$

であるから，

$$(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 0),\ (-3,\ 3,\ 2),\ (-3,\ 3,\ 0),\ (3,\ 3,\ -2).$$

7-13 (j33-2)

複素数平面上で，点 $P(1-\sqrt{3}i)$ を中心とする円に内接する正三角形がある．

この正三角形の頂点の1つが点 $A(2)$ であるとき，残りの2つの頂点を表す複素数を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

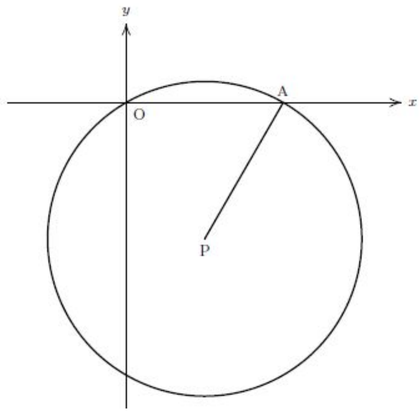
残りの2つの頂点のうち，実部が小さい方の点を表す複素数を z_1，大きい方の点を表す複素数を z_2 とする．

このとき，

$$z_1=\{2-(1-\sqrt{3}i)\}(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)+(1-\sqrt{3}i)$$
$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)$$
$$=-1-\sqrt{3}i,$$
$$z_2=\{2-(1-\sqrt{3}i)\}\{\cos(-120)^\circ+i\sin(-120)^\circ\}+(1-\sqrt{3}i)$$
$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)$$
$$=2-2\sqrt{3}i$$

であるから，残りの2つの頂点を表す複素数は，

$$-1-\sqrt{3}i,\quad 2-2\sqrt{3}i.$$



7-14 (s34-2)

(1) 方程式 $x^3=1$ および $x^3=-1$ の解をそれぞれ求めよ．

(2) k を実数の定数とする．方程式 $x^2+kx+1=0$ が異なる2つの解をもち，一方が他方の5乗となるように，k の値を定めよ．また，そのときの2つの解を求めよ．

(1) $x^3=1$ より，

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

であるから，$x^3=1$ の解は，

$$x=1,\quad \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

また，$x^3=-1$ より，

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

であるから，$x^3=-1$ の解は，

$$x=-1,\quad \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

(2) $x^2+kx+1=0$ が異なる2つの解をもつから，

$$k\neq\pm 2. \qquad \cdots ①$$

条件より，2つの解は α，α^5 とおけるから，

$$\alpha+\alpha^5=-k, \qquad \cdots ②$$
$$\alpha\alpha^5=1. \qquad \cdots ③$$

③より，

$$\alpha=\pm 1,\quad \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\quad \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

$\alpha=\pm 1$ のとき，②より，

$$k=\pm 2. \qquad (①に反する)$$

$\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ のとき，

$$\begin{cases}\alpha^3=1,\\ \alpha^2+\alpha+1=0\end{cases}$$

であるから，②より，

$$k=1.$$

$\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ のとき，

$$\begin{cases}\alpha^3=-1,\\ \alpha^2-\alpha+1=0\end{cases}$$

であるから，②より，

$$k=-1.$$

以上より，

$$k=1,\ 2つの解は\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},$$
$$k=-1,\ 2つの解は\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

7-15 (j36-3)

複素数平面上に条件 $\dfrac{z_2}{z_1}=2+2i$, $|z_2-z_1|=2$ を満たす 2 点 $\mathrm{P}(z_1)$, $\mathrm{Q}(z_2)$ がある．ただし，i は虚数単位，O は原点とする．

(1) $\angle\mathrm{POQ}$ の大きさを求めよ．

(2) 線分 OQ の長さを求めよ．

(3) $\sin\angle\mathrm{OPQ}$ の値を求めよ．

(1) 条件

$$\frac{z_2}{z_1}=2+2i$$

より，

$$\frac{z_2}{z_1}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad \cdots ①$$

であるから，

$$\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}. \qquad \cdots ②$$

(2) 条件 $|z_2-z_1|=2$ より，

$$\mathrm{PQ}=2.$$

また，①より，

$$\mathrm{OP}:\mathrm{OQ}=1:2\sqrt{2}$$

であるから，正の実数 t を用いて，

$$\mathrm{OP}=t,\quad \mathrm{OQ}=2\sqrt{2}t$$

とおける．

ここで，三角形 OPQ に余弦定理を用いると，

$$2^2=t^2+(2\sqrt{2}t)^2-2\cdot t\cdot 2\sqrt{2}t\cos\frac{\pi}{4}$$

であるから，

$$t^2=\frac{4}{5}.$$

$t>0$ より，

$$t=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

なので，

$$\mathrm{OQ}=2\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$=\frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

(3) 三角形 OPQ に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\sin\angle\mathrm{OPQ}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

であるから，(2) より，

$$\sin\angle\mathrm{OPQ}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\mathrm{OQ}}{2}$$
$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4\sqrt{10}}{5}}{2}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

7-16 (j37-1)

複素数平面上に，原点とは異なり，偏角が 35° である点 $\mathrm{P}(z)$ をとる．

(1) z^n が実数となるような最小の自然数 n の値を求めよ．

(2) z^n が純虚数となるような最小の自然数 n の値を求めよ．

z の定め方より，

$$\arg z=35^\circ$$

であるから，

$$\arg z^n=35^\circ\times n. \qquad \cdots ①$$

(1) z^n が実数である条件は，

$$\arg z^n=180^\circ\times k \qquad \cdots ②$$

を満たす整数 k が存在することである．

①，②より，

$$35^\circ\times n=180^\circ\times k$$

であるから，

$$k=\frac{7}{36}n.$$

これより，k が整数であるための条件は，

n が 36 の倍数であること

なので，求める最小の自然数 n は，

$$n=36.$$

(2)　z^n が純虚数である条件は，

$$\arg z^n = 90^\circ \times (2l-1) \qquad \cdots ③$$

を満たす整数 l が存在することである．

①，③より，

$$35^\circ \times n = 90^\circ \times (2l-1)$$

であるから，

$$2l-1 = \frac{7}{18}n.$$

これより，l が整数であるための条件は，

n が 18 の倍数であること

が必要なので，求める最小の自然数 n は，

$$n = 18.$$

7-17 (j40-1)

複素数に関する次の問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1)　方程式 $z^3 = i$ の 3 つの解 z_1，z_2，z_3 を求めよ．

ただし，$0 \leqq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$ とする．

(2)　等式 $z\overline{z} + 2(z+\overline{z}) + 2\sqrt{3}i(z-\overline{z}) + 12 = 0$ を満たす点 z 全体が表す図形を求め，その図形を複素数平面上に図示せよ．

(3)　a を正の実数とする．複素数 z_0 は ${z_0}^3 = ia$ を満たし，かつ z_0 の表す点が (2) で求めた図形上にあるとする．このとき，a と z_0 の値をそれぞれ求めよ．

(1)　z_1，z_2，z_3 の定め方より，

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\ z_2 &= \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\ z_3 &= \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi \\ &= -i. \end{aligned}$$

(2)　$\alpha = 2(1-\sqrt{3}i)$ として，等式

$$z\overline{z} + 2(z+\overline{z}) + 2\sqrt{3}i(z-\overline{z}) + 12 = 0$$

を変形すると，

$$z\overline{z} + 2(1-\sqrt{3}i)\overline{z} + 2(1+\sqrt{3}i)z + 12 = 0$$

$$(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha}) - |\alpha|^2 + 12 = 0$$

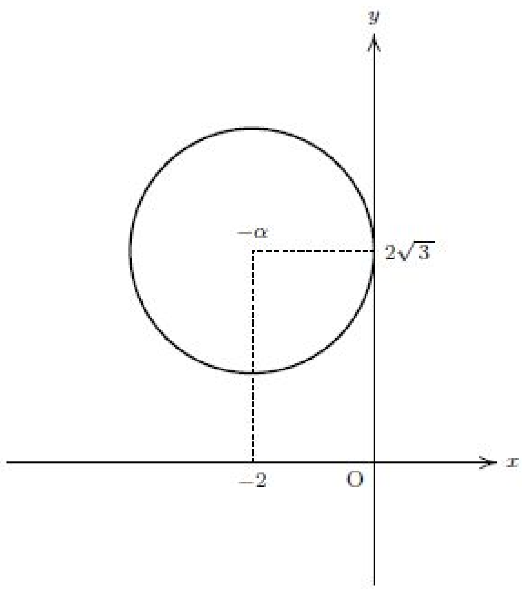
$$|z+\alpha|^2 = 4$$

$$|z-(-\alpha)| = 2$$

であるから，点 z 全体が表す図形は，

点 $(-\alpha =) -2+2\sqrt{3}i$ を中心とする半径 2 の円．

これを図示すると，次の図のようになる．



(3)　条件を偏角について考えれば，

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) \\ &= -3+\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

さらに，$z_0 = 2\sqrt{3}z_2$ であるから，

$$a = (2\sqrt{3})^3 = 24\sqrt{3}.$$

7-18 (s40-1)

複素数平面上の点 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$ を

$$a_1=1,\quad a_2=i,\quad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．

(1)　3点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ．

(2)　すべての点 b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ．

(1)　点列 $\{a_n\}$ の定め方より，帰納的にすべての自然数 n に対して，

$$a_n\neq 0$$

であるから，

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

の両辺を a_{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

さらに，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ のとき，

$$b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n}.$$

さらに，

$$b_1=\frac{a_2}{a_1}=i$$

であるから，

$$\begin{aligned}b_2&=1+\frac{1}{i}\\&=1-i,\\ b_3&=1+\frac{1}{1-i}\\&=1+\frac{1+i}{2}\\&=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

ここで，xy 平面において，3点 $(0,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通る円の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

とすると，

$$\begin{cases}1+b+c=0,\\ 2+a-b+c=0,\\ \dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2}b+c=0.\end{cases}$$

これを解くと，

$$a=-1,\quad b=0,\quad c=-1$$

であるから，

$$x^2+y^2-x-1=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{5}{4}.$$

したがって，3点 b_1，b_2，b_3 を通る円の中心は，

$$\frac{1}{2}$$

であり，半径は，

$$\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

---

(2)　すべての自然数 n に対して，

点 b_n が円 C の周上にある　　$\cdots(*)$

ことを数学的帰納法を用いて示す．

(I)　$n=1$ のとき，

(1) より，点 b_1 は円 C の周上にあるから，$(*)$ は成り立つ．

(II)　$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する，すなわち，点 b_k が円 C の周上にあるとする．

このとき，

$$\left|b_k-\frac{1}{2}\right|^2=\frac{5}{4}$$

であるから，

$$|b_k|^2-\frac{1}{2}(b_k+\overline{b_k})=1$$

$$b_k+\overline{b_k}=2|b_k|^2-2.$$

これより，

$$\begin{aligned}\left|b_{k+1}-\frac{1}{2}\right|^2&=\left|1+\frac{1}{b_k}-\frac{1}{2}\right|^2\\&=\left|\frac{b_k+2}{2b_k}\right|^2\\&=\frac{|b_k|^2+2(b_k+\overline{b_k})+4}{4|b_k|^2}\\&=\frac{|b_k|^2+2(2|b_k|^2-2)+4}{4|b_k|^2}\\&=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

であるから，点 b_{k+1} は円 C の周上にある．

よって，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ．

(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して，点 b_n は円 C の周上にある．

7-19 (s41-4)

複素数平面上に異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(1) があり，条件

$$\begin{cases} 3\alpha^2+\beta^2-6\alpha-2\beta+4=0 \\ \alpha\beta \neq 0 \\ |\,\alpha-1\,|=1 \end{cases}$$

を満たしている．

(1) $\dfrac{\beta-1}{\alpha-1}$ を求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(3) 3 点 C(1)，D$\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$，E$\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$ が一直線上にあるとき，α を求めよ．

(1) $3\alpha^2+\beta^2-6\alpha-2\beta+4=0$ より，

$$3(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=0. \qquad \cdots ①$$

ここで，

$$|\,\alpha-1\,|=1 \qquad \cdots ②$$

より，

$$\alpha-1\neq 0$$

であるから，③の両辺を $(\alpha-1)^2$ で割ると，

$$\left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}\right)^2=-3.$$

これより，

$$\frac{\beta-1}{\alpha-1}=\pm\sqrt{3}i. \qquad \cdots ③$$

(2) ③より，

$$|\,\beta-1\,|=\sqrt{3}\,|\,\alpha-1\,|. \qquad \cdots ④$$

②，③，④より，

$$\mathrm{AC}=1,\quad \mathrm{BC}=\sqrt{3},\quad \angle\mathrm{BCA}=90^\circ$$

であるから，三角形 ABC の面積は，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3) ③より，

$$\frac{1-\dfrac{1}{\beta}}{1-\dfrac{1}{\alpha}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta-1}{\alpha-1}$$
$$=\pm\sqrt{3}i\cdot\frac{\alpha}{\beta}$$

であり，3 点 C(1)，D$\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$，E$\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$ が一直線上にある条件は，

$$\frac{1-\dfrac{1}{\beta}}{1-\dfrac{1}{\alpha}} \text{ が実数であること}$$

なので，

$$\frac{\alpha}{\beta},\quad \text{すなわち，}\quad \frac{\beta}{\alpha} \text{ が純虚数}$$

のときを考えればよい．

ここで，$\alpha\beta\neq 0$ および②より，

$$\alpha-1=\cos\theta+i\sin\theta\quad(-\pi<\theta<\pi)$$

とおけるから，③より，

$$\begin{cases} \alpha=1+\cos\theta+i\sin\theta, \\ \beta=1\mp\sqrt{3}\sin\theta\pm\sqrt{3}i\cos\theta. \end{cases}$$

このとき，

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1\mp\sqrt{3}\sin\theta\pm\sqrt{3}i\cos\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}.$$

これより，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=(1+\cos\theta)(1\mp\sqrt{3}\sin\theta)\pm\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta$$
$$=1\mp\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$$

であるから，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ が純虚数となる条件は，

$$1\mp\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=0$$
$$2\sin\left(\theta\mp\frac{\pi}{6}\right)=\pm 1$$
$$\sin\left(\theta\mp\frac{\pi}{6}\right)=\pm\frac{1}{2}.$$

$-\pi<\theta<\pi$ より，

$$\theta\mp\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{6}$$

であるから，

$$\theta=\pm\frac{\pi}{3}.$$

したがって，

$$\alpha=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i. \qquad \text{(以上，複号同順)}$$

7-20 (s44-4)

z を複素数とする．複素数平面上の 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ．

3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が三角形の頂点であるから，

$$\begin{cases} 1 \neq z, \\ z \neq z^2, \\ z^2 \neq z^3 \end{cases}$$

より，

$$z \neq 0,\ 1.$$

(ⅰ)　∠CAB が鋭角のとき，

$$\left| \arg \frac{z^2-1}{z-1} \right| < \frac{\pi}{2}$$

であるから，

$$|\arg(z+1)| < \frac{\pi}{2}.$$

これより，

$$\mathrm{Re}(z) > -1.$$

(ⅱ)　∠ABC が鋭角のとき，

$$\left| \arg \frac{z^2-z}{1-z} \right| < \frac{\pi}{2}$$

であるから，

$$|\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}.$$

これより，

$$\mathrm{Re}(z) < 0.$$

(ⅲ)　∠BCA が鋭角のとき，

$$\left| \arg \frac{1-z^2}{z-z^2} \right| < \frac{\pi}{2}$$

であるから，

$$\left| \arg \frac{z+1}{z} \right| < \frac{\pi}{2}.$$

これより，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z} \right) > 0$$

であるから，

$$\frac{z+1}{z} + \overline{\frac{z+1}{z}} > 0$$

$$\overline{z}(z+1) + z\overline{(z+1)} > 0$$

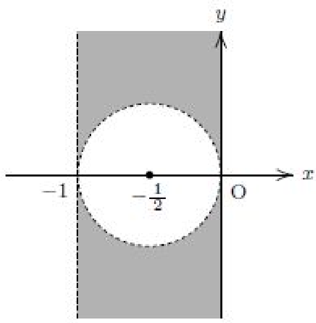
$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)} > \frac{1}{4}$$

$$\left| z+\frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}.$$

(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ) より，z に関する条件は，

$$\mathrm{Re}(z) > -1 \text{ かつ } \mathrm{Re}(z) < 0 \text{ かつ } \left| z+\frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}.$$

これを図示すると，次の図の網目部分．ただし，境界線上の点を含まない．



7-21 (s10-3)

複素数平面上に 0 と異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 があり，条件 (ア)，(イ)，(ウ) を満たしている．

(ア)　$\arg z_1 = \arg z_2 + 120^\circ$

(イ)　点 z_3 は，2 点 z_1，z_2 を通る直線に関して 0 と反対側にある．

(ウ)　三角形 $z_1z_2z_3$ は正三角形である．

このとき，次の問に答えよ．

(1)　$\alpha = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ とするとき，

$$\alpha z_1 = pz_1 + qz_2$$

$$\alpha z_2 = sz_1 + tz_2$$

となる実数 p，q，s，t をそれぞれ，$|z_1|$，$|z_2|$ を用いて表せ．

(2)　$z_3 = az_1 + bz_2$ となる実数 a，b をそれぞれ，$|z_1|$，$|z_2|$ を用いて表せ．

(1)　α の定め方より，条件 (ア) より，3 点 αz_1，0，z_2 はこの順に同一直線上にある．

よって，

$$\alpha z_1 = -\frac{|z_1|}{|z_2|}z_2.$$

また，3 点 0，z_2，αz_2 は正三角形の頂点であるから，2 点 0，z_1 を通る直線と 2 点 z_2，αz_2 を通る直線は平行である．

よって，

$$\alpha z_2 - z_2 = \frac{|z_2|}{|z_1|}z_1$$

であるから，

$$\alpha z_2 = \frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + z_2.$$

以上と p，q，s，t が実数であることより，

$$p = 0,\quad q = -\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad s = \frac{|z_2|}{|z_1|},\quad t = 1.$$

(2)　条件より，

$$z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1)$$

であるから，

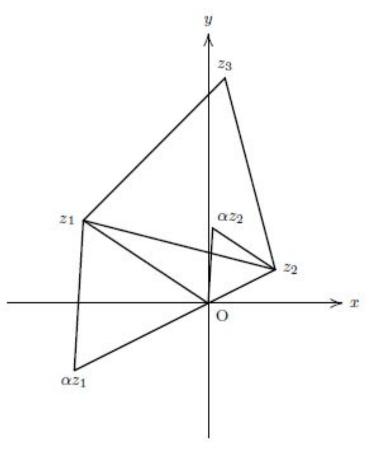
$$z_3 = (1-\alpha)z_1 + \alpha z_2.$$

これと (1) より，

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2 + \frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 + z_2 \\ &= \left(1 + \frac{|z_2|}{|z_1|}\right)z_1 + \left(1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}\right)z_2 \end{aligned}$$

であるから，a，b が実数より，

$$a = 1 + \frac{|z_2|}{|z_1|},\quad b = 1 + \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$



7-23 (j36-5)【問題略】

(1)　$\delta = 3+4i$ とすると，等式

$$z\overline{z} + (-3+4i)z - (3+4i)\overline{z} - 50 = 0 \qquad \cdots (*)$$

は，

$$z\overline{z} - \overline{\delta}z - \delta\overline{z} - 50 = 0$$

であるから，$|\,\delta\,|^2 = 25$ より，

$$(z-\delta)(\overline{z}-\overline{\delta}) - |\,\delta\,|^2 - 50 = 0$$

$$|\,z-\delta\,|^2 = 75$$

$$|\,z-\delta\,| = 5\sqrt{3}.$$

したがって，等式 $(*)$ を満たす点 z の全体の集合は，

中心が $\delta = 3+4i$，　半径が $5\sqrt{3}$

の円を表す．

(2)　$|\,\delta\,| = 5$ より，絶対値 $|\,z\,|$ の

最大値は $5\sqrt{3}+5$，　最小値は $5\sqrt{3}-5$．

(3)　α，β の定め方より，

$$|\,\alpha\,| = 5(\sqrt{3}+1), \quad |\,\beta\,| = 5(\sqrt{3}-1)$$

であるから，

$$|\,\gamma\,| = \left|\,\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\,\right| = 2+\sqrt{3}.$$

また，3 点 β，δ，α はこの順で一直線上にあるから，γ の偏角は，

$$\pi.$$

(4)　(3) の結果より，

$$\gamma = -(2+\sqrt{3}).$$

さらに，直線 AB 上の原点があるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\alpha-\beta) &= 4+4\sqrt{3}-(4-4\sqrt{3})\\ &= 8\sqrt{3}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}(2+\sqrt{3})\cdot 8\sqrt{3}\\ &= 12+8\sqrt{3}.\end{aligned}$$