

試験時間50分 解答は解答用紙に書いて、提出してください

- 1 不等式 $\log_3(x+2) + \log_3 x \leq 1$ を解け。
- 2 $y = 3(4^x + 4^{-x}) - 20(2^x + 2^{-x}) + 9$ とする。
 (1) $2^x + 2^{-x} = t$ とおくとき、 y を t の式で表せ。
 (2) y の最小値およびそのときの x の値を求めよ。
- 3 近似値 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を利用して
 (1) 18^{35} の桁数を求めよ。
 (2) 18^{35} の最高位の数字を求めよ。
- 4 $y = 5 \times 7^x$ のグラフは、 $y = 7^x$ のグラフを x 軸方向に だけ平行移動したものである。
- 5 $\log_{10}\left(\tan \frac{\pi}{10}\right) + \log_{10}\left(\tan \frac{2\pi}{10}\right) + \log_{10}\left(\tan \frac{3\pi}{10}\right) + \log_{10}\left(\tan \frac{4\pi}{10}\right)$ の値を求めよ。
- 6 $0^\circ < x < 90^\circ$, $\log_{\sin x} \cos x = \frac{2}{3}$ のとき、 $\log_{\cos x} \sqrt[3]{\tan x}$ の値を求めよ。
- 7 実数 x, y が $4^x + 2^x \cdot 3^y + 9^y = 7$ を満たすとき、 $2^{x+1} + 3^{y+1}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

1 解答 $0 < x \leq 1$

2 解答 (1) $y = 3t^2 - 20t + 3 (t \geq 2)$ (2) $x = \pm \log_2 3$ のとき最小値 $-\frac{91}{3}$

3 解答 (1) 44 桁 (2) 8

4 解答 $-\log_7 5$

5 解答 0

6 解答 $\frac{1}{6}$

7 解答 $2\sqrt{7} < 2^{x+1} + 3^{y+1} \leq \frac{14}{\sqrt{3}}$

① 真数は正であるから $x+2>0$ かつ $x>0$ すなわち $x>0$ …… ①

不等式を変形すると $\log_3(x+2)x \leq \log_3 3$

底 3 が 1 より大きいから $(x+2)x \leq 3$

式を整理して $x^2 + 2x - 3 \leq 0$

これを解くと $-3 \leq x \leq 1$ …… ②

①, ②の共通範囲を求めて $0 < x \leq 1$

② (1) $y = 3\{(2^x + 2^{-x})^2 - 2\} - 20(2^x + 2^{-x}) + 9$
 $= 3(2^x + 2^{-x})^2 - 20(2^x + 2^{-x}) + 3$ ゆえに $y = 3t^2 - 20t + 3$

また, $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ であり, 相加・相乗平均の大小関係により

$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$ から $t \geq 2$

等号成立は $2^x = 2^{-x}$ から $2^x = 1$ よって $x = 0$ のとき.

(2) $y = 3\left(t - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{100}{3} + 3 = 3\left(t - \frac{10}{3}\right)^2 - \frac{91}{3}$ ($t \geq 2$)

$t = \frac{10}{3}$ のとき y は最小値 $-\frac{91}{3}$ をとる.

$2^x + 2^{-x} = \frac{10}{3}$ の両辺に $3 \cdot 2^x$ を掛けて $3(2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 3 = 0$

$(2^x - 3)(3 \cdot 2^x - 1) = 0$ これを解いて $2^x = 3, \frac{1}{3}$ から $x = \log_2 3, -\log_2 3$

③ (1) $\log_{10} 18^{35} = 35 \log_{10} 18 = 35(\log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3) = 35(0.3010 + 2 \times 0.4771) = 43.9320$

よって $43 < \log_{10} 18^{35} < 44$ ゆえに $10^{43} < 18^{35} < 10^{44}$

したがって, 18^{35} は 44 桁の数である.

(2) (1) から $\log_{10} 18^{35} = 43 + 0.9320$

ところで $\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 = 0.9030, \log_{10} 9 = 2 \log_{10} 3 = 0.9542$

よって $8 = 10^{0.9030} < 10^{0.9320} < 10^{0.9542} = 9$

ゆえに $8 \times 10^{43} < 10^{43.9320} < 9 \times 10^{43}$ すなわち $8 \times 10^{43} < 18^{35} < 9 \times 10^{43}$

したがって, 18^{35} の最高位の数字は 8 である.

④ $y = 5 \times 7^x = 7^{\log_7 5} \cdot 7^x = 7^{x + \log_7 5} = 7^{x - (-\log_7 5)}$ から $y = 5 \times 7^x$ のグラフは $y = 7^x$ のグラフを x 軸方向に $-\log_7 5$ だけ平行移動したものの.

$$\boxed{5} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} \text{ において} \quad \tan \frac{4\pi}{10} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{10}}, \quad \tan \frac{3\pi}{10} = \frac{1}{\tan \frac{2\pi}{10}}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad & \log_{10}\left(\tan \frac{\pi}{10}\right) + \log_{10}\left(\tan \frac{2\pi}{10}\right) + \log_{10}\left(\tan \frac{3\pi}{10}\right) + \log_{10}\left(\tan \frac{4\pi}{10}\right) \\ &= \log_{10}\left(\tan \frac{\pi}{10}\right)\left(\tan \frac{2\pi}{10}\right)\left(\tan \frac{3\pi}{10}\right)\left(\tan \frac{4\pi}{10}\right) \\ &= \log_{10}\left(\tan \frac{\pi}{10}\right)\left(\tan \frac{2\pi}{10}\right)\left(\frac{1}{\tan \frac{2\pi}{10}}\right)\left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{10}}\right) = \log_{10} 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{6} \quad \log_{\cos x} \sqrt[3]{\tan x} = \log_{\cos x} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(\log_{\cos x} \sin x - 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\log_{\sin x} \cos x} - 1\right) \\ = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{7} \quad 2^{x+1} + 3^{y+1} = k \quad (k > 0) \text{ とおき, } 2^x = X, 3^y = Y \text{ とおくと, } X > 0, Y > 0,$$

$$X^2 + XY + Y^2 = 7 \dots\dots \textcircled{1} \quad 2X + 3Y = k \dots\dots \textcircled{2}$$

$X \geq 0, Y \geq 0$ とすると, ①, ② から $X = \sqrt{7}, Y = 0$ のとき k は最小値 $2\sqrt{7}$ をとる.

よって $k > 2\sqrt{7}$ また ② から $3Y = k - 2X$

$$\textcircled{1} \times 9 \text{ に代入すると } 9X^2 + 3X(k - 2X) + (k - 2X)^2 = 63$$

$$\text{よって } 7X^2 - kX + k^2 - 63 = 0 \dots\dots \textcircled{3}$$

ゆえに, ③ が $X > 0$ となる解 X をもつような k の値の範囲を求める.

$$\textcircled{3} \text{ の判別式を } D \text{ とすると } D = k^2 - 28(k^2 - 63) = -9(3k^2 - 196)$$

$$D \geq 0 \text{ とすると } 3k^2 - 196 \leq 0$$

$$k > 2\sqrt{7} \text{ であるから } 2\sqrt{7} < k \leq \frac{14}{\sqrt{3}} \dots\dots \textcircled{4}$$

$$f(X) = 7X^2 - kX + k^2 - 63 \text{ とおくと } f(X) = 7\left(X - \frac{k}{14}\right)^2 + \frac{27}{28}k^2 - 63$$

$\frac{k}{14} > 0$ であるから, ④ のとき ③ は常に正の解をもつ.

$$\text{ゆえに } 2\sqrt{7} < 2^{x+1} + 3^{y+1} \leq \frac{14}{\sqrt{3}}$$