数学 III の積分

$\boxed{\text{基本関数の積分公式}}$　←基本関数の微分公式）

$\boxed{\text{中身一次の積分}}$⇒置き換え＆係数でわる　←合成関数の微分公式

積分は積・商・合成関数に弱い（和・差・実数倍はバラせる）

$\boxed{\text{できるだけ和に直す，できるだけ次数を下げる}}$

　部分分数分解，積和変換，半角公式，パックづめ積分

$\boxed{f' \text{に着目する積分}}$←合成関数の微分公式

$\boxed{\text{部分積分}}$←積の微分公式

　①$x^n \times$● 型

　②$\log x \times$● 型

　③$\begin{cases} e^{\blacktriangle} \times \sin \blacksquare \\ e^{\blacktriangle} \times \cos \blacksquare \end{cases}$

$\boxed{\text{置換積分}}$

　①　$\sqrt{r^2 - x^2}$　⇒　$x = r\sin\theta$

　　$\dfrac{1}{x^2 + a^2}$　⇒　$x = a\tan\theta$

　　$\sqrt{x^2 + a^2}$　⇒　$t = x + \sqrt{x^2 + a^2}$

　②　$\sin x$　の奇数乗　⇒　$t = \cos x$

　　$\cos x$　の奇数乗　⇒　$t = \sin x$

　③　$t =$(関数の中身)　テケトーに置換

○$\left\{\log\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)\right\}' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$

【例題 01】$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$ の値を α とすると，$e^{\alpha} = \boxed{\text{ノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}$ である。2007 東邦

談話室マロニエ　数学QUIZ　数学Ⅲの積分計算

A 問題（n は非負整数とする）

積分の定義　微分の逆演算　（注）歴史的には積分の方が先

↓

微分公式

基本関数の積分公式　（x を変数，a を定数，$a \neq -1$ とする。）

$\int x^a dx = \boxed{*}$, $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \boxed{*}$, $\int e^x dx = \boxed{*}$, $\int a^x dx = \boxed{*}$

$\int \sin x dx = \boxed{*}$, $\int \cos x dx = \boxed{*}$, $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \boxed{*}$

中身一次の積分公式（$a \neq 0$）

$\int f(x) dx = F(x) + C$ のとき，$\int f(ax+b) dx = \boxed{*}$

積・商・指数（合成関数）の積分

$\sin x, \cos x$ の偶数乗の積分　⇒ $\boxed{*}$

$\sin$●x, $\cos$▲x の積　⇒ $\boxed{*}$

分母因数分解できる分数式　⇒ $\boxed{*}$

$\int \frac{f'}{f} = \boxed{*}$,　$\int f^n \cdot f' = \boxed{*}$

部分積分公式 $\boxed{*}$

部分積分が有効なのは $\boxed{*}$, $\boxed{*}$, $\boxed{*}$ のとき。

置換積分

置換積分が有効なのは

①$\sqrt{r^2 - x^2}$ のときは，$\boxed{*}$ で置換

②$\frac{1}{x^2 + a^2}$ のときは，$\boxed{*}$ で置換

③$\sin x$ の奇数乗のときは，$\boxed{*}$ で置換

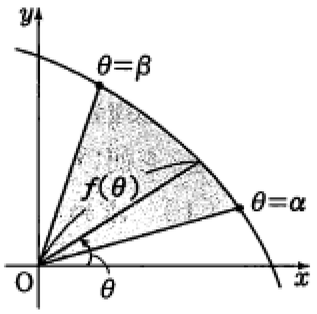
$\cos x$ の奇数乗のときは，$\boxed{*}$ で置換

数学Ⅲの積分の応用　チェックリスト

○　軸との間の面積（数学 II でも扱った）

○　交点を文字設定（便宜上）⇒文字の満たす条件式を使って面積計算

○　極座標面積

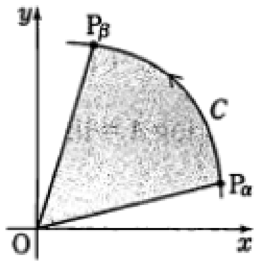


$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\left\{f(\theta)\right\}^2 d\theta$$

○　Gauss-Green の公式

ガウス-グリーンの公式

曲線 C 上の点 $P_\theta(x,\ y)$ が $x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とパラメータ表示されているとする．θ が増加するとき，点 P_θ が原点から見て左回りに動くものとするとき，曲線 C の $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ の部分と OP_α，OP_β で囲まれる部分の面積は



$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(\theta)g'(\theta)-g(\theta)f'(\theta)\}\,d\theta$$

で与えられる．ただし，α，β は $\alpha<\beta$ を満たす定数．

【例題 02】2014 東邦

xy 平面上の曲線 C は媒介変数 t $(0 \leq t \leq 2)$ を用いて

$$x=t(2-t),\ y=t(2-t)^2$$

と表される。曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

○　$I_n=\int_0^{\pi}|\sin nx|dx$　（n は自然数）は n の値によらず一定値 2 をとる

○　x 軸回転体体積　$V_x=\int_{x_1}^{x_2}\pi y^2dx$

○　y 軸回転体体積（1）　$V_y=\int_{y_1}^{y_2}\pi x^2dy$　に $y=f(x)$ を x について解いた式を代入

○　y 軸回転体体積（2）　$V_y=\int_{y_1}^{y_2}\pi x^2dy=\int_{x_1}^{x_2}\pi x^2\dfrac{dy}{dx}dx$　つまり置換積分

○　y 軸回転体体積（3）　バウムクーヘン分割（円筒分割）
$y=f(x)$ と x 軸との間 $a\leq x\leq b$ の部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積は，

$$V_y=\int_{x_1}^{x_2}2\pi xf(x)dx$$

○　Pappus-Guldin の定理　回転体体積は，面積が重心に集中しているとみなして求められる。
【例題】2008 杏林

○　非回転体体積処理　⇒　断面積を垂直に積分すると体積
(StepI)　x 軸に垂直に切る
(StepII)　切り口の断面積を x で表す
(StepIII)　それを積分すれば体積　$V=\int_a^bS(x)dx$

○　不等式で表された立体の体積　⇒　登場回数最多の文字を固定

○　板の回転　⇒　回転軸を含む平面に射影してから回転しても体積は不変

○　タマ台（球の一部）＝円の一部の回転体体積

○　一葉双曲面

○　斜回転体体積
$y=f(x)$ と $y=(\tan\theta)x$ の間($a\leq x\leq b$)の部分を
$y=(\tan\theta)x$ の周りに回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\int_a^b\pi \mathrm{PQ}^2\cos\theta\,dx$$

【例題】2014 獨協

○　区分求積法

○　弧長

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ s は，

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ s は

$$s=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

【例題 03】2008 杏林

座標平面上で

$$9x^2-54x+4y^2+45=0 \quad \cdots\cdots①$$

で表される楕円 C がある．①を x について解くと，C は

$$x=\boxed{\text{ア}}-\frac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}-y^2}}{\boxed{\text{エ}}} \quad \cdots\cdots②$$

$$x=\boxed{\text{オ}}+\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}-y^2}}{\boxed{\text{ク}}} \quad \cdots\cdots③$$

という 2 曲線で表される．x 軸に平行な C の 2 つの接線を l_1，l_2 とする．曲線②，l_1，l_2 および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は，$\boxed{\text{ケコサ}}\pi^2+\boxed{\text{シス}}\pi$ となり，曲線③，l_1，l_2 および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は，$\boxed{\text{セソ}}\pi^2+\boxed{\text{タチ}}\pi$ となる．C を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は，$\boxed{\text{ツテ}}\pi^2$ である．さらに，$x^2-6x+y^2+8=0$ で表される円と C によって囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は，$\boxed{\text{トナ}}\pi^2$ となる．

【例題 04】2012 東邦

$0 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ を定義域とする t の関数 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}\left|t-\sqrt{2-\frac{4}{3}x}\right|dx$ の最小値は

$\boxed{\text{ハヒ}}+\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$ である。

物理的問題

○ 平面上の点の運動の速度，加速度

座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標を $(x,\ y)$ とする。

$x=f(t)$，$y=g(t)$ とすると，

位置ベクトル　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$

速度ベクトル　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(f'(t),\ g'(t))$

速さ　$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

加速度ベクトル　$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(f''(t),\ g''(t))$

加速度ベクトルの大きさ　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

○ 平面上の運動における道のり

座標平面上で，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が曲線 C 上を動き，x，y が時刻 t の関数として

$x=f(t)$，　$y=g(t)$　$(\alpha \leqq t \leqq \beta)$　と表されているとする。

点Pの時刻 t における速度を $\vec{v}$ とすると，

道のり　$s=\displaystyle\int_\alpha^\beta |\vec{v}|\,dt=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

○ 近似式

$x \fallingdotseq a$ のとき，$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$　つまり一次近似＝接線

○ 水の問題　$dV=S\cdot dh$

【例題05】

曲線 $y=x(1-x)$ $\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1)　水面の上昇する速度を水面の高さ h の関数として表せ。

(2)　空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。

積分と漸化式

○$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$ のとき，$I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$

○$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,\ J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ のとき

① 区間逆走で，$I_n=J_n$

② 一個セパレートで，$I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$ ⇒ジグザグカウントダウン

○Beta 関数

$I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ のとき，

$$I(m,n)=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)$$ より，

$$I(m,n)=\frac{m!\ n!}{(m+n+1)!}$$

○$\tilde{I}(m,n)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx=\dfrac{m!\ n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

$t=(\beta-\alpha)x+\alpha$ の置換で Beta 関数に帰着（面積公式の一般化）

○$I_n=\int_0^e(\log x)^n dx$ のとき，$I_n=e-nI_{n-1}$

○$I_n=\dfrac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}dt$ のとき，$I_{n+1}=I_n-\dfrac{1}{(n+1)!\,e}$

【例題 06】

数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\cdots}$ を $a_n=\dfrac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}dt$ で定める．ここで e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

（1） $0\leqq\int_0^1 t^n e^{-t}dt\leqq 1-e^{-1}$ （$n=1,2,3,\cdots$）を示せ．

（2） $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ．

（3） $a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{(n+1)!e}$ （$n=1,2,3,\cdots$）を示せ．

（4） $e=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ を示せ．　　（高知大・理）

積分と級数

○メルカトル級数

$$\boxed{1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-x)^{n-1}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}}$$

$0\leq x\leq 1$ で定積分 $\displaystyle\int_0^1\left\{1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-x)^{n-1}\right\}dx=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx$

$$\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]_0^1=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1-(-1)^n\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}=\log 2-(-1)^n\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$ より，

$$\boxed{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots=\log 2}$$

○ライプニッツ級数

$$\boxed{1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-x)^{2(n-1)}=\frac{1-\left(-x^2\right)^n}{1+x}}$$

$0\leq x\leq 1$ で定積分 $\displaystyle\int_0^1\left\{1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-x)^{2(n-1)}\right\}dx=\int_0^1\frac{1-\left(-x^2\right)^n}{1+x^2}dx$

$$\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right]_0^1=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx=0$ より，

$$\boxed{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}}$$

積分と不等式（評価），そして極限

○数列の和＝棒グラフとみなして，定積分＝面積と比較

○被積分関数の評価から，定積分の評価を作る

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより
数Ⅲ積分計算篇

標準問題

③6-標-1

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sqrt{x}\,(2x+1)\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{5-2x}dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{3}{4x^2-1}dx$

(4) $\displaystyle\int\cos^2 x\,dx$

(5) $\displaystyle\int\sin 3x\cos 2x\,dx$

③6-標-2

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\tan x}dx$

(3) $\displaystyle\int\cos^3 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{x\log x}dx$

③6-標-3

次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\log x\,dx$

(2) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$

(5) $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$

③6-標-4

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin^4 x dx$

(2) $\int \frac{1}{\sin x} dx$

③6-標-5

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}}\, dx$

(2) $\int_{-1}^2 x\sqrt{4-x^2}\, dx$

(3) $\int_{-1}^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$

(4) $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4} dx$

(5) $\int_1^e 2^{\log x} dx$

③6-標-6

(1) 次の式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 \int_0^1 f(t)\, dt$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)\, dt = x^2 - 2x + a$$

③6-標-7

(1) $f(x) = e^x + \int_0^1 tf(t)\, dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $\int_0^x f(t)(x-t)\, dt = \log\left(1+x^2\right) + ax$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

発展問題

③6-発-1

次の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{\log\left(\sin^2 x\right)}{\tan x}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx$

③6-発-2

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

(2) $\displaystyle\int_1^3\sqrt{4x-x^2}\,dx$

③6-発-3

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^4\frac{1}{x^2-2x+4}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx$

③6-発-4

次の不定積分を求めよ。

$$\int\frac{x^3}{(x-1)^3(x-2)}dx$$

③**6-**発**-5**

(1) m, n を正の整数とするとき，次の定積分の値を求めよ。

(ｉ) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx$

(ⅱ) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$

(2) a, b, c を定数とするとき，定積分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|x-(a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x)\right|^2 dx$$

の値を最小にする a, b, c および最小値を求めよ。

③**6-**発**-6**

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$　の値を求めよ。

③**6-**発**-7**

次の定積分の値を求めよ。

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\log\left(\sqrt{3}+\tan x\right)dx$$

③**6-**発**-8**

$\displaystyle I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx,\ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ とおくとき I_1 と I_2 の関係を導いて，それらの値を求めよ

③6-発-9

定積分$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$の値を求めよ。

③6-発-10

(1)　関数$f(x)$はつねに$f(x)=f(-x)$を満たす。このとき，

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{a}f(x)\,dx$$ となることを示せ。

(2)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx$を計算せよ。

③6-発-11

次の積分を計算せよ。ただし，nは自然数とする。

(1) $\displaystyle I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$

(2) $\displaystyle J_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx$

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより
数Ⅲ積分の応用篇

標準問題

③6-標-8

関数 $f(x)=\sin\left(\sqrt{x}\pi\right)$ $(0\leq x\leq 4)$ に対し，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

③6-標-9

曲線 $y^2=x^2\left(4-x^2\right)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

③6-標-10

曲線 $2x^2+2xy+y^2=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

③6-標-11

平面上で，原点 O から曲線 $y=(9-2x)e^x$ に 2 本の接線を引き，その接点を P，Q とする。2 つの線分 OP，OQ と曲線の弧 $\overparen{\mathrm{PQ}}$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

③6-標-12

曲線 $y=-\log ax$ $(a>0)$ と，原点を中心とするある円とが，x 座標が 1 となる点で接している。このとき a の値を定め，曲線，円および x 軸の正の部分で囲まれる部分の面積 S を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

③**6-標-13**

関数 $y=\tan x\ \left(0\leq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y=f(x)$ とするとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

③**6-標-14**

$f(t)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-t\sin x|\,dx$ とおく。関数 $f(t)$ の $t>0$ における最小値を求めよ。

③**6-標-15**

曲線 $y=e^{mx}\ \left(m>0,\ x\geq 0\right)$ に原点Oから引いた接線の接点をP，P から y 軸におろした垂線の足をとする。△OPQ 内で $y\geq e^{mx}$ の成り立つ部分をA_1，残りをA_2とし，A_1，A_2が y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1, V_2 とする。$\dfrac{V_1}{V_2}$ の値を求めよ。

③**6-標-16**

区間 $0\leq x\leq\pi$ において，2 点 $\mathrm{P}\left(x,\ x+\sin^2 x\right)$，$\mathrm{Q}\left(x,\ \pi\right)$ を考え，1 辺は PQ，他の 1 辺は長さが $\sin x$ である長方形（特別な場合は線分あるいは点）を，x 軸に垂直な平面上に作る。点P，Q の x 座標が 0 から π まで動くとき，この長方形が描く立体図形の体積を求めよ。

③**6-標-17**

$f(x)=\pi x^2\sin\pi x^2$ とする。$y=f(x)$ のグラフの $0\leq x\leq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ。

③6-標-18

関数 $y=f(x)=\log\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}-\sqrt{1-x^2}$ について，次の問いに答えよ。

（1） $y=f(x)$ のグラフをかけ。

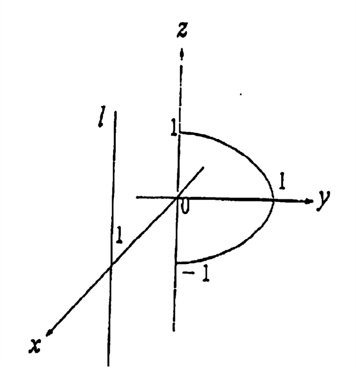
（2） 曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$y=a$ $(a>0)$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を $V(a)$ とする。このとき，極限値 $\lim\limits_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。

③6-標-19

放物線 $y=x^2-1$ の x 軸より下の部分を，y 軸のまわりに回転して得られる容器を U とする。U に水を満たし，そのあとで半径 1 の鉄球を U に静かに入れたとき，残った水の体積を求めよ。

③6-標-20

xyz 空間において，点 $(1,0,0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とする。yz 平面内にあって，$y=1-z^2$ で表される曲線の $-1\leq z\leq 1$ なる部分を，直線 l のまわりに回転してできる曲面と，平面 $z=1$ および，$z=-1$ とによって囲まれる部分の体積を求めよ。



③6-標-21

$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(0\leq\theta\leq 2\pi,\ a$ は定数で $a>0)$ で表される曲線 C がある。

（1） 曲線 C の概形をかけ。

（2） 曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

（3） 曲線 C と x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ。

発展問題

③**6-**発**-12**

z軸を軸とする半径１の円柱の側面で，xy 平面より上（z軸の正の方向）にあり，平面 $x-\sqrt{3}y+z=1$ より下（z軸の負の方向）にある部分をＤとする。Ｄの面積を求めよ。

③**6-**発**-13**

$x^2-xy+y^2=1$ の $y\geq 0$ の部分を x 軸のまわりに回転した立体の体積を求めよ。

③**6-**発**-14**

正四面体Ｔと半径１の球面Ｓとがあって T の６つの辺がすべてＳに接しているという。

(1)　Ｔの一辺の長さを求めよ。

(2)　Ｔの外側にあって，Ｓの内側にある部分の体積を求めよ。

③**6-**発**-15**

座標空間において，２点 $\mathrm{P}\left(2,0,0\right)$，$\mathrm{Q}\left(2,0,9\right)$ を結ぶ線分PQをz軸のまわりに回転して得られる曲面と，平面 $z=0$ および平面 $3x+z-3=0$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

③6-発-16

xyz 空間において条件

$$x^2+y^2 \leq z^2,\ z^2 \leq x,\ 0 \leq z \leq 1$$

を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ の全体からなる立体を考える。この立体の体積を V とし，$0 \leq k \leq 1$ に対し，z 軸に直交する平面 $z=k$ による切り口の面積を $S(k)$ とする。

(1) $k=\cos\theta$ とおくとき，$S(k)$ を θ で表せ。ただし，$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) V の値を求めよ。

③6-発-17

D を半径 1 の円板，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条件(a)，(b)を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ。

(a)　D の中心は C 上にある。

(b)　D が乗っている平面は常にベクトル $(0,\ 1,\ 0)$ と直交する。

③6-発-18

xyz 空間において，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1$ によって表される立体の体積を求めよ。

③6-発-19

　x 軸，y 軸，z 軸を軸とする半径 1 の 3 個の直円柱 T_1，T_2，T_3 がある。

(1) T_1 と T_2 の内部の共通部分の体積を求めよ。

(2) T_1 と T_2 および T_3 の内部の共通部分の体積を求めよ。

③6-発-20

xy 平面上に円板 $D: x^2+y^2 \leq 4,\ z=0$ がある。

平面 $z=1$ 上に，点 $(0,0,1)$ を重心にもち，頂点の 1 つが A$(0,3,1)$ の正三角形 T（内部を含む）がある。

点 Q が D 全体を動くとき，線分 AQ の通過する領域を V_1 とする。

また，点 P が T 全体を動き，点 Q が D 全体を動くとき，線分 PQ の通過する領域を V_2 とする。

③6-発-21

座標空間において，平面 $z=1$ 上に一辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。点 A，B，C から平面 $z=0$ におろした垂線の足をそれぞれ D，E，F とする。動点 P は A から B の方向へ出発し，一定の速さで△ABC の周を一周する。動点 Q は同時に E から F の方向へ出発し，P と同じ一定の速さで△DEF の周を一周する。線分 PQ が通過してできる曲面と△ABC，△DEF によって囲まれる立体を V とする。

(1) 平面 $z=a\ (0 \leq a \leq 1)$ による V の切り口はどのような図形か。

(2) V の体積を求めよ。

③6-発-22

$$\begin{cases} x=\sin 2\theta \\ y=\sin 3\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$ で表される曲線を C とする。

(1) C の概形を図示せよ。

(2) C が囲む部分を y 軸中心に回転してできた立体の体積を求めよ。

③6-発-23

曲線$y=\sin x$ $(0\leq x\leq \pi)$と$(0,0)$, $(\pi,0)$でのこの曲線の接線とで囲まれた図形を直線$y=x$のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

③6-発-24

xyz空間内の平面$y=1$上で，$(x-1)^2+z^2\leq 1,\ y=1$で表される図形をDとする。Dをz軸のまわりに1回転させてできる立体をMとする。

(1)　平面$z=h$ $(-1\leq h\leq 1)$による立体Mの切り口の面積を求めよ。

(2)　立体Mの体積を求めよ。

③6-発-25

xyz空間内に, 3点$\mathrm{P}\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(1, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$を頂点とする正三角形の板$S$がある。$S$を$z$軸のまわりに一回転させたとき，$S$が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

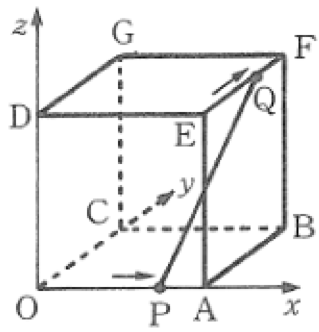
③$\boxed{\textbf{6-発-26}}$

xyz 空間で，xy 平面上の原点を中心とし半径が 1 の円を C とする．2 点 A(0, 0, 1)，B(1, 0, 1) を結ぶ線分 AB 上に点 P をとり，P を頂点とし円 C を底面とする円すいを考え，P を A から B まで動かすとき，このような円すい全体でつくられる立体を D とする．

(1) 平面 $z=t$（$0 \leqq t \leqq 1$）でこの立体 D を切った切り口の面積を求めよ．

(2) 立体 D の体積を求めよ．

③$\boxed{\textbf{6-発-27}}$



図のように xyz 空間に一辺の長さが 1 の立方体 DEFG-OABC がある．2 つの動点 P，Q はそれぞれ O，E を同時に出発し，P は正方形 OABC 上をこの順に 1 周し，Q は P と同じ速さで正方形 EFGD 上をこの順に 1 周する．このとき線分 PQ が通過してできる曲面と正方形 OABC，正方形 EFGD によって囲まれる立体を K とする．

(1) 平面 $z=t$（$0 \leqq t \leqq 1$）でこの立体 K を切った切り口の面積を求めよ．

(2) 立体 K の体積を求めよ．

③$\boxed{\textbf{6-発-28}}$

一辺の長さが 1 の立方体を，中心を通る対角線のうちの 1 本を軸として回転させたとき，この立方体が通過する部分の体積を求めよ。

SoyPaste 数学Ⅲの積分計算＋応用

SP③6-1 (j3-5)　○

次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\sin(5x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+3x^2}{x^2+3x+2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 x^5e^{x^3}\,dx$

SP③6-2 (j20-1)　○

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(3+x^2)^2}$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

SP③6-3 (r5-1)　△

(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\sin x$，$\cos x$，$\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ．

(2) 曲線 $y=\dfrac{1}{(\cos x+1)(\sin x+1)}$ と，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ および x 軸，y 軸によって囲まれた図形の面積を求めよ．

SP③6-4 (r6-1)　△

$y=xe^{1-x}$ と $y=x$ のグラフで囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

SP③6-5 (r7-1)　△

関数 $f(x)$ が式

$$f(x) = e^x - \int_0^1 tf(t)x\,dt$$

を満たすとき，$f(x)$ を求めよ．

SP③6-6 (r18-2)　△

曲線 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ $(y \geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形を D とする．

(1)　D の面積を求めよ．

(2)　D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

SP③6-7 (r28-2)　○

a，b は定数で，$0 < a < b$ とする．$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y = \cos x$ と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積が，2 つの曲線 $y = a\sin x$，$y = b\sin x$ によって 3 等分されるとする．このとき，a，b の値を求めよ．

SP③6-8 (r30-2)　○

曲線 C が媒介変数 θ を用いて，

$$x = \sqrt{2}(\theta - \sin\theta), \quad y = \sqrt{2}(1 - \cos\theta)$$

と表されるとする．

(1)　曲線 C 上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点 $(x,\ y)$ における接線の傾きを求めよ．

(2)　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ で，xy 平面上に曲線 C のグラフをかけ．

(3)　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ で，xy 平面上で曲線 C と x 軸とで囲まれた面積を求めよ．

SP③6-9 (r37-1)　○

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$f(x)=e^{-x}\sin x$，$g(x)=e^{-x}$，$h(x)=-e^{-x}$ がある．

(1)　$f(x) \leqq g(x)$，$f(x) \geqq h(x)$ を示せ．また，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点，$y=f(x)$ と $y=h(x)$ の共有点を求めよ．

(2)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．また，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ．

(3)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

SP③6-10 (r39-2)　○

$f(x)$ は連続関数で $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=1$，$f(x)=f(-x)\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ を満たすものとする．

このとき，$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx$ の値を求めよ．

SP③6-11 (r41-2)　○

$a>0$ とする．曲線 $y=a\log x$ と x 軸および直線 $x=e$ で囲まれる図形を D とする．

D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_x，D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_y とする．

このとき，$V_x=V_y$ となるような正の実数 a の値を求めよ．

SP③6-12 (j1-5)

$x>0$ とし，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする．また，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

このとき，C と x 軸との交点の x 座標を a とすると，

$$a=\boxed{\textbf{(1)}}$$

である．

また，関数 $f(x)$ が極大値をとる x の値は，

$$x=\boxed{\textbf{(2)}}$$

である．

さらに，C の変曲点の x 座標を b とすると，

$$b=\boxed{\textbf{(3)}}$$

であり，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\boxed{\textbf{(4)}}$$

である．

SP③6-13 (j5-4)　○

次の問に答えよ．

(1) $\tan x=t\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\cos 2x$ と $\dfrac{dx}{dt}$ をそれぞれ，t を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{2-\cos 2x}\,dx$ を求めよ．

(3) 関数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ．

(4) $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ とおくことにより，$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ．

SP③6-14 (j6-4)

曲線 C : $y = \log \dfrac{x}{e}$ 上の点 $(e^2,\ 1)$ における接線を l とする．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 次の定積分 I_1，I_2 の値を求めよ．

$$I_1 = \int_1^e \log x\,dx, \quad I_2 = \int_1^e (\log x)^2\,dx$$

(3) 曲線 C，接線 l および x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

SP③6-15 (j7-3)

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で定義された連続関数 $f(x)$ が，

$$f(x) = \int_0^1 e^{x+t} f(t)\,dt + x$$

を満たすとき，$f(x)$ を求めよ．

SP③6-16 (j8-1)

$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$I_n = \int_1^2 (x-1)^n (2-x)^2\,dx$$

とするとき，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ を求めよ．

SP③6-17 (j10-3)

次の問に答えよ．

(1) $(\tan x)' - 1 = \tan^2 x$ を示せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx$ を求めよ．

SP③6-18 (j12-3)

実数 a に対して，

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-ax)^2\,dx$$

とするとき，a^2 の係数は (　　)，a の係数は (　　) であるから，$I(a)$ は $a=$ (　　) のとき，最小値をとる．

SP③6-19 (j14-4)

(1) 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\pi}x\cos x\,dx,\qquad \int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$$

(2) 次の定積分が最小になるように，定数 a の値を定めよ．

$$\int_0^{\pi}(x-a)^2\,dx$$

(3) 次の定積分を最小にする定数 b の値と，最小値を求めよ．

$$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}-b\cos x\right)^2\,dx$$

SP③6-20 (j16-2)

(1) 曲線 C_1 : $6y-x^2=k$ と曲線 C_2 : $y=\log(x+2)$ が共有点をもち，この点で 2 つの曲線の接線が一致するとき，定数 k の値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) (1) のとき，曲線 C_1，C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

SP③6-21 (j17-4)

$y=f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で定義された連続な関数で $f(0)=0$，$f(1)=1$ であり，$0\leqq x_1<x_2\leqq 1$ であるすべての x_1，x_2 に対して $f(x_1)<f(x_2)$ を満たしているとする．$x=g(y)$ を $0\leqq y\leqq 1$ で定義された f の逆関数とする．

$$5\int_0^1 f(x)\,dx=2\int_0^1 g(y)\,dy$$

が成り立つとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

SP③6-22 (j18-4)

xy 平面において，不等式 $\left(\dfrac{x^2}{3}+y^2-1\right)\left(x^2+\dfrac{y^2}{3}-1\right) \leqq 0$ が表す領域の面積を求めよ．

SP③6-23 (j18-5)

媒介変数表示された曲線 C

$$x=\theta-\sin\theta, \quad y=1-\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた領域を D とする．

(1) 速度ベクトル $\overrightarrow{v}=\left(\dfrac{dx}{d\theta}, \dfrac{dy}{d\theta}\right)$ を θ を用いて表せ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \cos^2\theta\, d\theta$ および $\displaystyle\int \cos^3\theta\, d\theta$ を求めよ．

(3) 領域 D の面積を求めよ．

(4) 領域 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(5) 速度ベクトルの大きさ $|\overrightarrow{v}|$ を θ を用いて表せ．

(6) 曲線 C の長さを求めよ．

SP③6-24 (j19-4)

a は定数とする．$f(x)$ は連続関数で，

$$\int_0^x (t-x)f(t)\,dt = -\sin x + ax$$

を満たすとする．このとき，定数 a と関数 $f(x)$ を求めよ．

SP③6-25 (j20-4)

関数 $f(x)=\log\dfrac{1+x^2}{2}$ を考える．

(1)　$f(x)=0$ を満たす x の値を求めよ．

(2)　$y=f(x)$ の増減と凹凸を調べ，グラフの概形をかけ．

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる図形を，y 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ．

SP③6-26 (j21-4)

線分 $y=x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に水を満たし，その中に半径 1 の鉄球を静かに沈めるとき，あふれ出る水量を求めよ．

SP③6-27 (j23-4)

$a>5$ とする．円 C : $x^2+(y-a)^2=25$ が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は，円 C を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積の 5 倍に一致している．このとき，a の値を求めよ．

SP③6-28 (j26-2)

数直線上を座標が 8 の点 A から出発して運動する点 P がある．出発してから x 秒後の P の座標を $f(x)$ とし，その速度 $f'(x)$ は $6x(x-2)$ であるとする．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　P が A から原点まで移動するのに要する時間を求めよ．

(3)　(2) の後，P が原点から A に戻るのに要する時間を求めよ．

SP③6-29 (j26-5)

$\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e$ で定義された関数 $f(x) = x\log x$ に対して，次の問に答えよ．ここで，$\log x$ は x の自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1)　$y = f(x)$ の増減，およびグラフの凹凸を調べて，グラフをかけ．

(2)　関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する．その理由を述べよ．また，逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求め，$y = f^{-1}(x)$ のグラフをかけ．

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$ を求めよ．

SP③6-30 (j27-4)

(1)　$x < 0$ のとき，e^{-x} と x^2+1 の大小関係を調べよ．

(2)　2 つの曲線 $y = xe^{-x}$，$y = x(x^2+1)$ と直線 $x = -1$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

SP③6-31 (j29-4)

xy 平面を水平にとり，xz 平面に曲線

$$C : z = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ x^2 - 1 & (1 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

を描く．さらに，C を z 軸のまわりに回転してできる容器に，毎秒 π の割合で水を注ぐ．

(1)　注水を始めてからこの容器がいっぱいになるまでの時間を求めよ．

(2)　注水し始めてから 4 秒後の水面が上昇する速さと，水面の半径が増大する速さを求めよ．

SP③6-32 (j30-4)

関数 $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ について，次の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値と変曲点を求め，曲線 $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

SP③6-33 (j35-4)

媒介変数表示 $x=\cos\theta$，$y=\cos^2\theta\tan\dfrac{\theta}{2}$ が表す曲線を C とする．ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) y を最大にする θ の値を α とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

SP③6-34 (j36-4)

関数 $f(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ について考える．$\alpha>1$ のとき，次の問に答えよ．

(1) 方程式 $f(t)=\alpha$ を満たす正の解を T とする．T を α を用いて表せ．

(2) $x=f(t)$，$y=f'(t)$ とするとき，次の定積分 I の値を α を用いて表せ．

$$I=\int_1^\alpha y\,dx$$

SP③6-35 (j37-5)

微分可能な関数 $f(x)$ が $f(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt$ を満たすとする．

(1) $f'(x)$ を $f(x)$ で表すと，$\boxed{\textbf{(1)}}$ である．

(2) $f''(x)$ を $f(x)$ で表すと，$\boxed{\textbf{(2)}}$ である．

(3) $\log\{f(x)+f'(x)\}=\boxed{\textbf{(3)}}$ である．

(4) $f(x)=\boxed{\textbf{(4)}}$ である．

SP③6-36 (j40-4)

不等式 $x^2\leqq y\leqq x$ で表される平面上の領域を直線 $y=x$ のまわりに1回転して得られる回転体の体積を求めよ．

SP③6-37 (j41-1)

関数 $y=e^x$ のグラフの $x \geqq 0$ の部分を C，関数 $y=(e-2)x+2$ のグラフを l とする．

C と l が点 $(1,\ e)$ のみで交わることに注意して，y 軸と C および l とで囲まれる部分を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ．

SP③6-38 (j43-3)

曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ について，$y \leqq 5$ の部分の長さを求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

SP③6-39 (j44-4)

関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\displaystyle\int_1^{2x}(3t-4x)t\log t\,dt\ (x>0)$ について，次の問に答えよ．

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について，$f'(x)=0$ を満たす x の値を求めよ．

(2)　$f(x)$ の極値を求めよ．

SP③6-40 (j32-5)

定義域が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ である関数 $f(x)=4\sin x+2\cos 2x+1$ の

極大値は $\boxed{\text{ア}}$，　極小値は $\boxed{\text{イウ}}$，　$\boxed{\text{エ}}$

である．

また，$f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると，

$$F(x)=\boxed{\text{オカ}}\cos x+\sin 2x+x+C$$

である．ただし，C は積分定数である．

したがって，

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\boxed{\text{キ}}\pi$$

である．

さらに，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，不等式 $f(x) \leqq 0$ を満たす x の範囲は，

$$\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi \leqq x \leqq \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$$

であるから，

$$\int_0^{2\pi}|\,f(x)\,|\,dx=\boxed{\text{スセ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}+\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\pi$$

である．