談話室マロニエSoyPaste演習期の数学

1 二次関数

————

2 二次関数

————

3 二次関数

————

4 二次関数

————

5 二次関数

————

6 二次関数

————

7 二次関数

————

8 二次関数

————

9 二次関数

————

10 二次関数

————

11 二次関数

————

12 二次関数

————

13 数学Ⅲの積分

13-1 (j3-5)

次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)\sin(5x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+3x^2}{x^2+3x+2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 x^5e^{x^3}\,dx$

(1) $(e^x-e^{-x})'=e^x+e^{-x}$ であるから，

$$\int_1^2 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx=\Big[\log|e^x-e^{-x}|\Big]_1^2$$
$$=\log(e^2-e^{-2})-\log(e-e^{-1})$$
$$=\log\left(e+\frac{1}{e}\right).$$

(2) $\sin(3x)\sin(5x)=\dfrac{1}{2}\{\cos(2x)-\cos(8x)\}$ であるから，

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin(3x)\sin(5x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\{\cos(2x)-\cos(8x)\}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)-\frac{1}{8}\sin(8x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{32}.$$

(3) x^3+3x^2 を変形すると，

$$x^3+3x^2=x(x^2+3x+2)-2x$$
$$=x(x^2+3x+2)-(2x+3)+3$$

であるから，

$$\int_0^1\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x+2}\,dx$$
$$=\int_0^1\left\{x-\frac{2x+3}{x^2+3x+2}+\frac{3}{(x+1)(x+2)}\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left\{x-\frac{2x+3}{x^2+3x+2}+3\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-\log|x^2+3x+2|+3\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}+\log\frac{64}{81}.$$

(4) $(e^{x^3})'=3x^2e^{x^3}$ であるから，

$$\int_1^2 x^5e^{x^3}\,dx=\left[x^3\cdot\frac{1}{3}e^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_1^2$$
$$=\frac{7}{3}e^8.$$

13-2 (j20-1)

次の定積分を求めよ。　(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(3+x^2)^2}$　(2) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$

(1) $x=\sqrt{3}\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

であり，

$$\frac{1}{(3+x^2)^2}=\frac{1}{9(1+\tan^2\theta)^2}$$
$$=\frac{1}{9}\cos^4\theta.$$

また，

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{6}$

であるから，

$$\int_0^1\frac{dx}{(3+x^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{9}\cos^4\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

(2) $x = 2\sin\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$dx = 2\cos\theta\,d\theta$$

であり，

$$\begin{aligned} x^2\sqrt{4-x^2} &= 4\sin^2\theta\sqrt{4(1-\sin^2\theta)} \\ &= 8\sin^2\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

また，

x	-2	$\to$	2
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

であるから，対称性より，

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx &= 2\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^2\theta\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta \\ &= 8\left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

13-3 (r5-1)

(1) $t = \tan\frac{x}{2}$ とするとき，$\sin x$，$\cos x$，$\frac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ．

(2) 曲線 $y = \frac{1}{(\cos x + 1)(\sin x + 1)}$ と，直線 $x = \frac{\pi}{2}$ および x 軸，y 軸によって囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) 倍角の公式より，

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ &= 2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} \\ &= 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} \\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{2t}{1+t^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 \\ &= \frac{2}{1+t^2} - 1 \\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

また，$t = \tan\frac{x}{2}$ より，

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1+t^2) \end{aligned}$$

なので，

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，

$$y = \frac{1}{(\cos x + 1)(\sin x + 1)} \geqq 0$$

であるから，求める面積を S とすると，

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\cos x + 1)(\sin x + 1)}.$$

ここで，$t = \tan\frac{x}{2}$ のとき，

x	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\to$	1

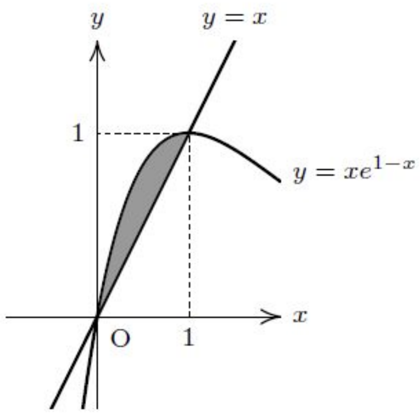
であるから，(1) の結果より，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \frac{1}{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)\left(\dfrac{2t}{1+t^2}+1\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t)^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \left\{1-\frac{2}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}\right\} dt \\
&= \left[t-2\log|1+t|-\frac{2}{1+t}\right]_0^1 \\
&= 2(1-\log 2).
\end{aligned}
$$

13-4 (r6-1)

$y = xe^{1-x}$ と $y = x$ のグラフで囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$y = xe^{1-x}$ と $y = x$ のグラフで囲まれた部分は次の図の網目部分である．



求める体積を V とすると，

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi(xe^{1-x})^2\,dx - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2\cdot 1 \\
&= e^2\pi\int_0^1 x^2e^{-2x}\,dx - \frac{\pi}{3} \\
&= e^2\pi\left[-\frac{1}{4}(2x^2+2x+1)e^{-2x}\right]_0^1 - \frac{\pi}{3} \\
&= \left(\frac{1}{4}e^2-\frac{19}{12}\right)\pi.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^2e^{-2x}\,dt &= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \\
&= -\frac{1}{4}(2x^2+2x+1)e^{-2x} + C
\end{aligned}
$$

13-5 (r7-1)

関数 $f(x)$ が式

$$
f(x) = e^x - \int_0^1 tf(t)x\,dt
$$

を満たすとき，$f(x)$ を求めよ．

$f(x)$ の定め方より，

$$f(x)=e^x-x\int_0^1 tf(t)\,dt. \qquad \cdots ①$$

ここで，

$$\int_0^1 tf(t)\,dt$$

は定数であるから，定数 A を用いて，

$$\int_0^1 tf(t)\,dt=A \qquad \cdots ②$$

とおける．

このとき，①は，

$$f(x)=e^x-Ax \qquad \cdots ③$$

であるから，

$$tf(t)=te^t-At^2. \qquad \cdots ④$$

②，④より，

$$\begin{aligned} A&=\int_0^1 (te^t-At^2)\,dt \\ &=\left[(t-1)e^t-\frac{A}{3}t^3\right]_0^1 \\ &=-\frac{A}{3}+1 \end{aligned}$$

であるから，

$$A=-\frac{A}{3}+1.$$

これを解くと，

$$A=\frac{3}{4}$$

であるから，③より，

$$f(x)=e^x-\frac{3}{4}x.$$

13-6 (r18-2)

曲線 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\ (y\geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形を D とする．

(1)　D の面積を求めよ．

(2)　D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(1)　求める面積を S とすると，対称性と $y\geqq 0$ より，

$$\begin{aligned} S&=2\int_0^2 y\,dx \\ &=2\int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx \\ &=\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx \\ &=\pi\cdot 2^2\times\frac{1}{4} \\ &=\pi. \end{aligned}$$

(2)　求める体積を V とすると，対称性より，

$$\begin{aligned} V&=2\int_0^2 \pi y^2\,dx \\ &=2\pi\int_0^2 \left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx \\ &=2\pi\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_0^2 \\ &=\frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

【補足】(１)楕円の面積を公式で覚える，(２)パップス・ギュルダンの定理を用いる

13-7 (r28-2)

a，b は定数で，$0<a<b$ とする．$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y=\cos x$ と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積が，2 つの曲線 $y=a\sin x$，$y=b\sin x$ によって 3 等分されるとする．このとき，a，b の値を求めよ．

曲線 $y=\cos x$ と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積は,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

曲線 $y=\cos x$ と $y=a\sin x$ の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における交点の x 座標を α とすると,

$$\cos\alpha = a\sin\alpha$$

であるから,

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}},\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}. \qquad \cdots ①$$

また，条件より,

$$\int_0^{\alpha} a\sin x\,dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\Big[-a\cos x\Big]_0^{\alpha} + \Big[\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

であるから,

$$-a\cos\alpha + a + 1 - \sin\alpha = \frac{1}{3}. \qquad \cdots ②$$

①，②より,

$$-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}} + a + 1 - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{3}$$

$$a + \frac{2}{3} = \sqrt{a^2+1}$$

$$\left(a+\frac{2}{3}\right)^2 = a^2+1$$

$$a = \frac{5}{12}.$$

さらに，曲線 $y=\cos x$ と $y=b\sin x$ の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における交点の x 座標を β とすると,

$$\cos\beta = b\sin\beta$$

であるから,

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}},\quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}. \qquad \cdots ③$$

また，条件より,

$$\int_0^{\beta} (\cos x - b\sin x)\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\Big[\sin x + b\cos x\Big]_0^{\beta} = \frac{1}{3}$$

であるから,

$$\sin\beta + b\cos\beta - b = \frac{1}{3}. \qquad \cdots ④$$

③，④より,

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2+1}} - b = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{b^2+1} = b + \frac{1}{3}$$

$$b^2+1 = \left(b+\frac{1}{3}\right)^2$$

$$b = \frac{4}{3}.$$

以上より,

$$a = \frac{5}{12},\quad b = \frac{4}{3}.$$

13-8 (r30-2)

曲線 C が媒介変数 θ を用いて,

$$x = \sqrt{2}(\theta - \sin\theta),\quad y = \sqrt{2}(1-\cos\theta)$$

と表されるとする.

(1) 曲線 C 上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点 $(x,\ y)$ における接線の傾きを求めよ.

(2) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ で，xy 平面上に曲線 C のグラフをかけ.

(3) $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ で，xy 平面上で曲線 C と x 軸とで囲まれた面積を求めよ.

(1) $\begin{cases} x = \sqrt{2}(\theta - \sin\theta) \\ y = \sqrt{2}(1 - \cos\theta) \end{cases}$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \sqrt{2}(1 - \cos\theta) \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$$

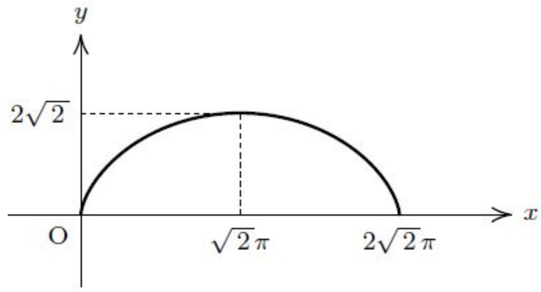
であるから，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接線の傾きは，

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{2} + 1.$$

(2)　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ における点 $(x,\ y)$ の動きは次のようになる．O$(0,\ 0)$，A$(\sqrt{2}\pi,\ 2\sqrt{2})$，B$(2\sqrt{2}\pi,\ 0)$ とする．

θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	+	+	+	0
$\frac{dy}{d\theta}$	0	+	0	−	0
$(x,\ y)$	O	↗	A	↘	B

これより，C の概形は次のようになる．



(3)　求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\sqrt{2}\pi} y\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1 - \cos\theta)\sqrt{2}(1 - \cos\theta)\,d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\ &= 2\left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

13-9 (r37-1)

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$f(x) = e^{-x}\sin x$，$g(x) = e^{-x}$，$h(x) = -e^{-x}$ がある．

(1)　$f(x) \leqq g(x)$，$f(x) \geqq h(x)$ を示せ．また，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点，$y = f(x)$ と $y = h(x)$ の共有点を求めよ．

(2)　$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．また，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ．

(3)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

(1)　$$g(x) - f(x) = e^{-x}(1 - \sin x) \geqq 0$$

であるから，

$$g(x) \geqq f(x).$$

また，

$$f(x) - h(x) = e^{-x}(\sin x + 1) \geqq 0$$

であるから，

$$f(x) \geqq h(x).$$

さらに，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標は，

$$1 - \sin x = 0$$

の解であるから，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より，共有点の座標は，

$$\left(\frac{\pi}{2},\ e^{-\frac{\pi}{2}}\right).$$

さらに，$y = f(x)$ と $y = h(x)$ の共有点の x 座標は，

$$\sin x + 1 = 0$$

の解であるから，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より，共有点の座標は，

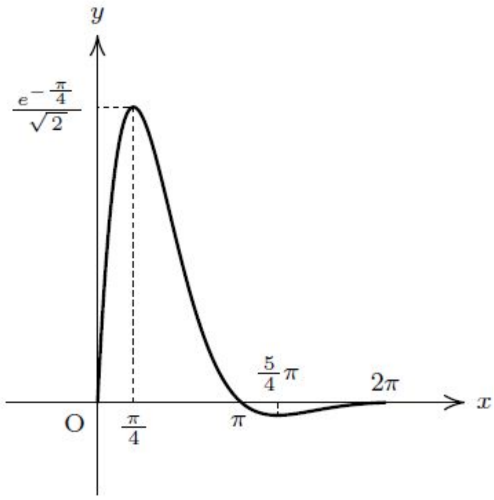
$$\left(\frac{3}{2}\pi,\ -e^{-\frac{3}{2}\pi}\right).$$

(2)　$f(x) = e^{-x}\sin x$ より，

$$f'(x) = e^{-x}(-\sin x + \cos x)$$

であるから，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	0



これより，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の

$$\text{最大値は}\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\quad \text{最小値は} -\frac{e^{-\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}}.$$

(3)　求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-e^{-x}\sin x)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right]_0^{\pi} \\
&\qquad + \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right]_{2\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})^2.
\end{aligned}$$

13-10 (r39-2)

$f(x)$ は連続関数で $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$，$f(x) = f(-x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ を満たすものとする．このとき，$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx$ の値を求めよ．

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx$$

とすると，

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx - \int_0^{-1} \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx.$$

ここで，$x = -t$ とすると，

$$f(x) = f(-x)$$

より，

$$\begin{aligned}
\int_0^{-1} \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx &= \int_0^1 \frac{f(-t)}{1+e^{-t}}(-dt) \\
&= -\int_0^1 \frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx + \int_0^1 \frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx \\
&= \int_0^1 f(x)\left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}}\right)dx \\
&= \int_0^1 f(x)\left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx \\
&= \int_0^1 f(x)\,dx \\
&= 1.
\end{aligned}$$

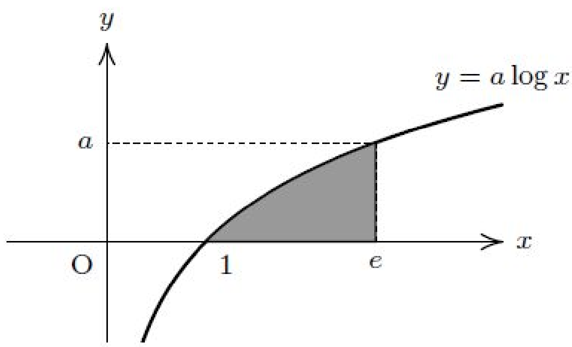
13-11 (r41-2)

$a>0$ とする．曲線 $y=a\log x$ と x 軸および直線 $x=e$ で囲まれる図形を D とする．

D を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_x，D を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_y とする．

このとき，$V_x=V_y$ となるような正の実数 a の値を求めよ．

D を図示すると，次の図の網目部分である．



D の定め方より，

$$\begin{aligned} V_x &= \int_1^e \pi y^2\,dx \\ &= \pi\int_1^e (a\log x)^2\,dx \\ &= \pi a^2\Big[x(\log x)^2-2(x\log x-x)\Big]_1^e \\ &= \pi a^2(e-2). \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} V_y &= \pi e^2\cdot a-\int_0^a \pi x^2\,dy \\ &= \pi a\cdot e^2-\pi\int_0^a \left(e^{\frac{y}{a}}\right)^2 dy \\ &= \pi a\cdot e^2-\pi\left[\frac{a}{2}e^{\frac{2y}{a}}\right]_0^a \\ &= \frac{\pi a(e^2+1)}{2}. \end{aligned}$$

したがって，$V_x=V_y$ より，

$$\pi a^2(e-2)=\frac{\pi a(e^2+1)}{2}$$

であるから，$a>0$ より，求める a の値は，

$$a=\frac{e^2+1}{2(e-2)}.$$

13-12 (j1-5)

$x>0$ とし，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする．また，曲線 $y=f(x)$ を C とする．

このとき，C と x 軸との交点の x 座標を a とすると，

$$a=\boxed{\textbf{(1)}}$$

である．

また，関数 $f(x)$ が極大値をとる x の値は，

$$x=\boxed{\textbf{(2)}}$$

である．

さらに，C の変曲点の x 座標を b とすると，

$$b=\boxed{\textbf{(3)}}$$

であり，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\boxed{\textbf{(4)}}$$

である．

a の定め方より，

$$\frac{\log a}{a}=0$$

であるから，

$$a=1.$$

また，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ より，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

であるから，$x>0$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

これより，$f(x)$ が極大値をとる x の値は，

$$x=e.$$

さらに，$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より，

$$f''(x)=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

であるから，$x>0$ における曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\cap$	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	$\cup$

これより，

$$b=e\sqrt{e}.$$

以上より，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx&=\int_1^{e\sqrt{e}}\frac{\log x}{x}\,dx\\&=\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^{e\sqrt{e}}\\&=\frac{9}{8}.\end{aligned}$$

13-13 (j5-4)

次の問に答えよ．

(1) $\tan x = t \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\cos 2x$ と $\dfrac{dx}{dt}$ をそれぞれ，t を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\cos 2x}\,dx$ を求めよ．

(3) 関数 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ．

(4) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ．

(1) $\tan x = t$ のとき，

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1\\ &= \frac{2}{1+\tan^2 x} - 1\\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2},\\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\frac{dt}{dx}}\\ &= \cos^2 x\\ &= \frac{1}{1+\tan^2 x}\\ &= \frac{1}{1+t^2}.\end{aligned}$$

(2) (1) の結果より，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2-\cos 2x}\,dx &= \int_0^1 \frac{t}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt\\ &= \int_0^1 \frac{t}{3t^2+1}\,dt\\ &= \left[\frac{1}{6}\log(3t^2+1)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3}\log 2.\end{aligned}$$

(3) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ より，

$$e^{2x} - 1 = 2ye^x$$

であるから，

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

$e^x > 0$ より，

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

であるから，求める逆関数は，

$$y = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$

(4) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ のとき，(3) より，

$$\sqrt{x^2+1} = e^t - \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

であるから，

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}.$$

また，

$$dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,dt$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int dt\\ &= t + C\\ &= \log(x + \sqrt{x^2+1}) + C.\end{aligned}$$

13-14 (j6-4)

曲線 C ： $y=\log\dfrac{x}{e}$ 上の点 $(e^2,\ 1)$ における接線を l とする．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 次の定積分 I_1，I_2 の値を求めよ．

$$I_1=\int_1^e \log x\,dx,\quad I_2=\int_1^e (\log x)^2\,dx$$

(3) 曲線 C，接線 l および x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(1) $y=\log\dfrac{x}{e}$ より，

$$y'=\frac{1}{x}$$

であるから，点 $(e^2,\ 1)$ における接線 l の方程式は，

$$y=\frac{x}{e^2}.$$

(2) I_1，I_2 の定め方より，

$$\begin{aligned}I_1&=\int_1^e \log x\,dx\\&=\Big[x\log x-x\Big]_1^e\\&=1,\\I_2&=\Big[x(\log x)^2\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\&=e-2I_1\\&=e-2.\end{aligned}$$

(3) 求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot e^2-\int_e^{e^2}\pi y^2\,dx\\&=\frac{e^2}{3}\pi-\pi\int_e^{e^2}\left(\log\frac{x}{e}\right)^2dx.\end{aligned}$$

ここで，$t=\dfrac{x}{e}$ とすると，

$$\frac{1}{e}\,dx=dt$$

であり，

x	e	$\to$	e^2
t	1	$\to$	e

したがって，

$$\begin{aligned}V&=\frac{e^2}{3}\pi-\pi\int_1^e(\log t)^2\cdot e\,dt\\&=\frac{e^2}{3}\pi-e\pi\int_1^e(\log t)^2\,dt\end{aligned}$$

であるから，(2) の結果より，

$$\begin{aligned}V&=\frac{e^2}{3}\pi-e\pi(e-2)\\&=\frac{2}{3}e(3-e)\pi.\end{aligned}$$

13-15 (j7-3)

$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で定義された連続関数 $f(x)$ が，

$$f(x)=\int_0^1 e^{x+t}f(t)\,dt+x$$

を満たすとき，$f(x)$ を求めよ．

$f(x)$ の定め方より,

$$f(x) = e^x \int_0^1 e^t f(t)\,dt + x$$

なので,

$$\int_0^1 e^t f(t)\,dt = a \qquad \cdots ①$$

とすると,

$$f(x) = ae^x + x. \qquad \cdots ②$$

①, ②より,

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 e^t(ae^t + t)\,dt \\ &= \int_0^1 (ae^{2t} + te^t)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}ae^{2t} + (t-1)e^t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}ae^2 - \left(\frac{1}{2}a - 1 \right) \end{aligned}$$

であるから,

$$a = \frac{2}{3-e^2}.$$

②より,

$$f(x) = \frac{2}{3-e^2}e^x + x.$$

13-16 (j8-1)

$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して,

$$I_n = \int_1^2 (x-1)^n (2-x)^2\,dx$$

とするとき, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ を求めよ.

I_n の定め方より,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}(2-x)^2 \right]_1^2 \\ &\qquad + 2\int_1^2 \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}(2-x)\,dx \\ &= \left[\frac{2}{(n+1)(n+2)}(x-1)^{n+2}(2-x) \right]_1^2 \\ &\qquad + 2\int_1^2 \frac{1}{(n+1)(n+2)}(x-1)^{n+2}\,dx \\ &= \left[\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}(x-1)^{n+3} \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

であるから,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} I_k$$

とすると,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} \right\} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} I_n &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

13-17 (j10-3)

次の問に答えよ.

(1)　$(\tan x)' - 1 = \tan^2 x$ を示せ.

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$ を求めよ.

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx$ を求めよ.

(1) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ であるから,

$$\begin{aligned}(\tan x)' - 1 &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1\\ &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \tan^2 x.\end{aligned}$$

よって，示せた。

(2) (1) より,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{(\tan x)' - 1\}\,dx\\ &= \Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= 1 - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(3) (1) より,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\{(\tan x)' - 1\}\,dx\\ &= \left[x(\tan x - x) + \log\cos x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\log 2.\end{aligned}$$

13-18 (j12-3)

実数 a に対して,

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - ax)^2\,dx$$

とするとき，a^2 の係数は (　　)，a の係数は (　　) であるから，$I(a)$ は $a = $ (　　) のとき，最小値をとる.

$I(a)$ を変形すると,

$$I(a) = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx - 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$$

であるから,

$$\begin{aligned}(a^2\text{ の係数}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi^3}{24}\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}(a\text{ の係数}) &= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx\\ &= -2\Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -2.\end{aligned}$$

したがって,

$$I'(a) = \frac{\pi^3}{12}a - 2$$

であり，$I(a)$ が a の 2 次関数であることから，$I(a)$ は $a = \dfrac{24}{\pi^3}$ のとき，最小値をとる.

13-19 (j14-4)

(1) 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx, \quad \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$$

(2) 次の定積分が最小になるように，定数 a の値を定めよ．

$$\int_0^{\pi} (x-a)^2\,dx$$

(3) 次の定積分を最小にする定数 b の値と，最小値を求めよ．

$$\int_0^{\pi} \left(x-\frac{\pi}{2}-b\cos x\right)^2 dx$$

(1) 部分積分法より，

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x+\cos x\Big]_0^{\pi} = -2.$$

また，

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

(2) $I=\int_0^{\pi}(x-a)^2\,dx$ とすると，

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{3}(\pi-a)^3-\frac{1}{3}(-a)^3 \\ &= \pi\left(a-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi^3}{12} \end{aligned}$$

であるから，I を最小にする a の値は，

$$a=\frac{\pi}{2}.$$

(3) $J=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}-b\cos x\right)^2 dx$ とすると，

$$J=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 dx - 2b\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x\,dx + b^2\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx.$$

ここで，

$$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{12},$$

$$\int_0^{\pi}\cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = 0$$

であるから，(1) の結果より，

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2}b^2+4b+\frac{\pi^3}{12} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(b+\frac{4}{\pi}\right)^2+\frac{\pi^4-96}{12\pi}. \end{aligned}$$

したがって，J は $b=-\frac{4}{\pi}$ のとき，

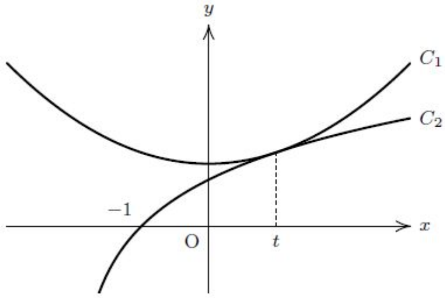
最小値 $\frac{\pi^4-96}{12\pi}$

をとる．

13-20 (j16-2)

(1) 曲線 C_1 : $6y-x^2=k$ と曲線 C_2 : $y=\log(x+2)$ が共有点をもち，この点で 2 つの曲線の接線が一致するとき，定数 k の値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) (1) のとき，曲線 C_1，C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．



(1)　$f(x)=\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{k}{6},\quad g(x)=\log(x+2)$

とし，C_1 と C_2 の共有点の x 座標を t $(t>-2)$ とすると，この点における接線が一致する条件は，

$$\begin{cases} f(t)=g(t), \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6}t^2+\dfrac{k}{6}=\log(t+2), \\ \dfrac{1}{3}t=\dfrac{1}{t+2}. \end{cases}$$

第 2 式より，

$$(t+3)(t-1)=0.$$

$t>-2$ より，

$$t=1.$$

第 1 式より，

$$k=6\log 3-1.$$

(2)　S の定め方より，

$$\begin{aligned} S&=\int_0^1\left\{\frac{1}{6}x^2+\log 3-\frac{1}{6}-\log(x+2)\right\}dx \\ &=\left[\frac{1}{18}x^3+\left(\log 3-\frac{1}{6}\right)x-(x+2)\log(x+2)+x\right]_0^1 \\ &=\frac{8}{9}+2\log\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

13-21 (j17-4)

$y=f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で定義された連続な関数で $f(0)=0$，$f(1)=1$ であり，$0\leqq x_1<x_2\leqq 1$ であるすべての x_1，x_2 に対して $f(x_1)<f(x_2)$ を満たしているとする．$x=g(y)$ を $0\leqq y\leqq 1$ で定義された f の逆関数とする．

$$5\int_0^1 f(x)\,dx=2\int_0^1 g(y)\,dy$$

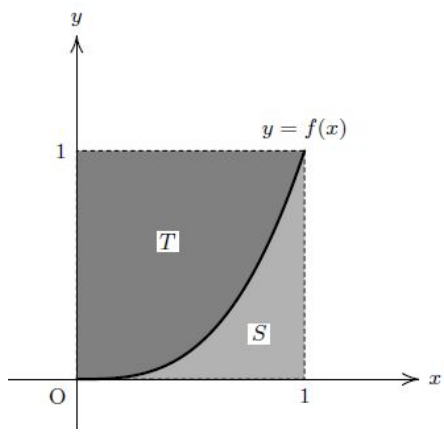
が成り立つとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

$$\begin{cases} 0\leqq x\leqq 1 \text{ において，} & f(x)\geqq 0, \\ 0\leqq y\leqq 1 \text{ において，} & g(y)\geqq 0 \end{cases}$$

であるから，

$$S=\int_0^1 f(x)\,dx,\quad T=\int_0^1 g(y)\,dy$$

とすると，S，T は面積を表す．



さらに，f と g が逆関数の関係にあるので，

$$S+T=1. \qquad \cdots ①$$

これと条件より，

$$5S=2T. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{2}{7}.$$

13-22 (j18-4)

xy 平面において，不等式 $\left(\dfrac{x^2}{3}+y^2-1\right)\left(x^2+\dfrac{y^2}{3}-1\right) \leqq 0$ が表す領域の面積を求めよ．

2 つの楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，$x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ は直線 $y=x$ に関して対称であるから，第 1 象限にある交点は楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ と直線 $y=x$ の交点のうち第 1 象限にある点で，その座標は，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

さらに，対称性より，求める面積は 8 等分できるので，連立不等式 $y \geqq 0$，$y \leqq x$ と D の共通部分の面積を求める．

したがって，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}\frac{S}{8} &= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1-\frac{1}{3}x^2}\,dx - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \sqrt{3-3x^2}\,dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx - \sqrt{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

であり，

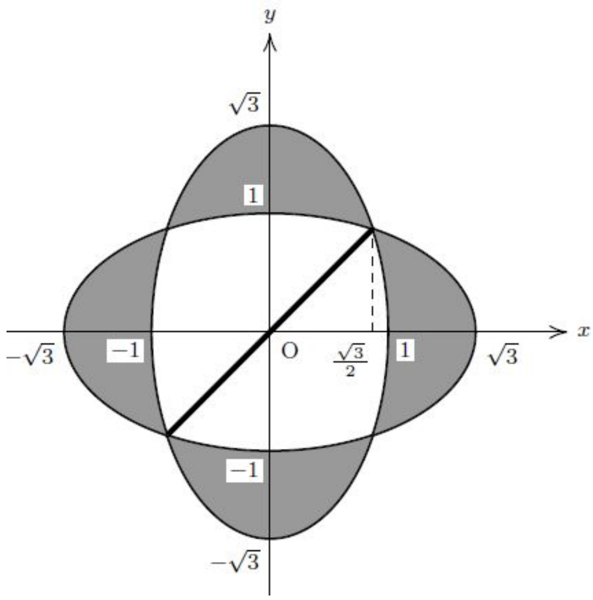
$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{S}{8} &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) - \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi.\end{aligned}$$

したがって，

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$$



13-23 (j18-5)

媒介変数表示された曲線 C

$$x = \theta - \sin\theta, \quad y = 1 - \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と x 軸で囲まれた領域を D とする.

(1) 速度ベクトル $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{d\theta}, \ \dfrac{dy}{d\theta}\right)$ を θ を用いて表せ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \cos^2\theta\,d\theta$ および $\displaystyle\int \cos^3\theta\,d\theta$ を求めよ.

(3) 領域 D の面積を求めよ.

(4) 領域 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

(5) 速度ベクトルの大きさ $|\vec{v}|$ を θ を用いて表せ.

(6) 曲線 C の長さを求めよ.

(1) x, y の定め方より,

$$\vec{v} = (1 - \cos\theta, \quad \sin\theta).$$

(2) 以下では, C_1, C_2 は積分定数とする.

$$\begin{aligned}\int \cos^2\theta\,d\theta &= \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + C_1, \\ \int \cos^3\theta\,d\theta &= \int \cos\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta \\ &= \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + C_2.\end{aligned}$$

(3) 求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{2\pi} y\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \left[\theta - 2\sin\theta + \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi.\end{aligned}$$

(4) 求める体積を V とすると,

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{2\pi} \pi y^2\,dx \\ &= \pi\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)^3\,d\theta \\ &= \pi\int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta)\,d\theta \\ &= \pi\left[\theta - 3\sin\theta + 3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right) - \left(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\right]_0^{2\pi} \\ &= 5\pi^2.\end{aligned}$$

(5) (1) の結果より,

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos\theta} \\ &= \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|.\end{aligned}$$

(6) (5) の結果より,

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta \\ &= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= 8.\end{aligned}$$

13-25 (j19-4)

a は定数とする．$f(x)$ は連続関数で，

$$\int_0^x (t-x)f(t)\,dt = -\sin x + ax$$

を満たすとする．このとき，定数 a と関数 $f(x)$ を求めよ．

$$\int_0^x (t-x)f(t)\,dt = -\sin x + ax$$

より，

$$\int_0^x tf(t)\,dt - x\int_0^x f(t)\,dt = -\sin x + ax$$

であるから，両辺を x で微分すると，

$$xf(x) - \left\{\int_0^x f(t)\,dt + xf(x)\right\} = -\cos x + a$$

なので，

$$-\int_0^x f(t)\,dt = -\cos x + a. \qquad \cdots (*)$$

さらに，両辺を x で微分すると，

$$-f(x) = \sin x$$

なので，

$$f(x) = -\sin x.$$

また，$(*)$ において，$x=0$ とすると，

$$0 = -1 + a$$

なので，

$$a = 1.$$

13-26 (j20-4)

関数 $f(x) = \log\dfrac{1+x^2}{2}$ を考える．

(1) $f(x)=0$ を満たす x の値を求めよ．

(2) $y=f(x)$ の増減と凹凸を調べ，グラフの概形をかけ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる図形を，y 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ．

(1) $f(x)=0$ より，

$$\log\frac{1+x^2}{2} = 0$$

であるから，

$$\frac{1+x^2}{2} = 1.$$

したがって，$f(x)=0$ を満たす x の値は，

$$x = \pm 1.$$

(2) $f(x) = \log\dfrac{1+x^2}{2}$ より，

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

であるから，$f(x)$ の増減および曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	⤵	0	↳	$\log\frac{1}{2}$	⤴	0	↱

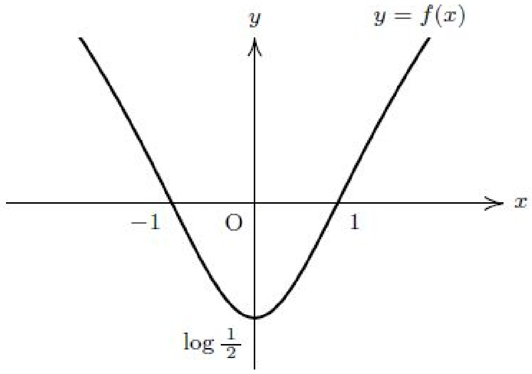
これより，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標は，

$$(\pm1,\ 0).$$

また，

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$$

であるから，曲線 $y=f(x)$ は次のようになる．



(3)　回転体の体積を V とすると，

$$V=\int_{\log\frac{1}{2}}^{0}\pi x^2\,dy. \qquad \cdots ①$$

ここで，

$$y=\log\frac{1+x^2}{2}$$

より，

$$x^2=2e^y-1 \qquad \cdots ②$$

であるから，①，②より，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{\log\frac{1}{2}}^{0}(2e^y-1)\,dy\\&=\pi\Big[2e^y-y\Big]_{\log\frac{1}{2}}^{0}\\&=\pi(1-\log 2).\end{aligned}$$

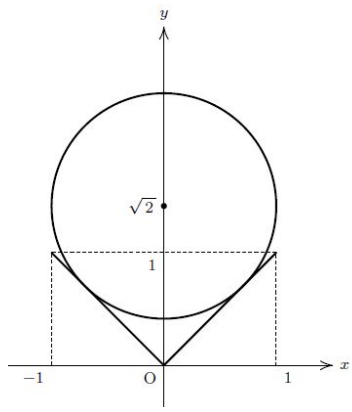
【補足】①は置換積分でも計算できる。（$y=\log\frac{1+x^2}{2}$）

13-28 (j21-4)

線分 $y=x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に水を満たし，その中に半径 1 の鉄球を静かに沈めるとき，あふれ出る水量を求めよ．

あふれ出る水の量を V とすると，

$$\begin{aligned}V&=\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\pi(\sqrt{1-x^2})^2\,dx\\&=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{2}-1}^{1}\\&=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}\pi.\end{aligned}$$



13-29 (j23-4)

$a>5$ とする．円 C : $x^2+(y-a)^2=25$ が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は，円 C を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積の 5 倍に一致している．このとき，a の値を求めよ．

円の方程式 $x^2+(y-a)^2=25$ より，

$$y=a\pm\sqrt{25-x^2}$$

であるから，

$$\begin{cases} y_1=a+\sqrt{25-x^2}, \\ y_2=a-\sqrt{25-x^2} \end{cases}$$

とすると，C を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_x は，対称性より，

$$\begin{aligned} V_x &= 2\left(\int_0^5 \pi{y_1}^2\,dx-\int_0^5 \pi{y_2}^2\,dx\right) \\ &= 2\pi\int_0^5 ({y_1}^2-{y_2}^2)\,dx \\ &= 8a\pi\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx \\ &= 8a\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 5^2\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= 50\pi^2 a. \end{aligned}$$

また，C を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_y は，

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{4}{3}\pi\cdot 5^3 \\ &= \frac{500}{3}\pi. \end{aligned}$$

したがって，条件 $V_x=5V_y$ より，

$$50\pi^2 a=\frac{2500}{3}\pi$$

であるから，

$$a=\frac{50}{3\pi}.$$

13-30 (j26-2)

数直線上を座標が 8 の点 A から出発して運動する点 P がある．出発してから x 秒後の P の座標を $f(x)$ とし，その速度 $f'(x)$ は $6x(x-2)$ であるとする．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　P が A から原点まで移動するのに要する時間を求めよ．

(3)　(2) の後，P が原点から A に戻るのに要する時間を求めよ．

(1)　速度 $f'(x)$ が

$$f'(x)=6x(x-2)$$

を満たすので，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int 6x(x-2)\,dx \\ &= 2x^3-6x^2+C. \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

ただし，C は積分定数．

また，条件より，

$$f(0)=8. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$C=8$$

であるから，

$$f(x)=2x^3-6x^2+8.$$

(2)　P が A から原点まで移動することは，

$$f(x)=0$$

で表すことができるので，(1) の結果より，

$$2(x^3-3x^2+4)=0$$

$$2(x+1)(x-2)^2=0.$$

よって，P が A から原点まで移動するのに要する時間は，

$$2\,(秒).$$

(3)　P が原点から A に戻ることは，

$$f(x)=8$$

と表すことができるので，

$$2x^3-6x^2+8=8$$

$$2x^2(x-3)=0.$$

$x\geqq 2$ より，

$$x=3$$

であるから，(2) の後，P が原点から A に戻るのに要する時間は，

$$3-2=1\,秒.$$

13-32 (j26-5)

$\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e$ で定義された関数 $f(x) = x\log x$ に対して，次の問に答えよ．ここで，$\log x$ は x の自然対数であり，e は自然対数の底である．

(1) $y = f(x)$ の増減，およびグラフの凹凸を調べて，グラフをかけ．

(2) 関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する．その理由を述べよ．また，逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求め，$y = f^{-1}(x)$ のグラフをかけ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$ を求めよ．

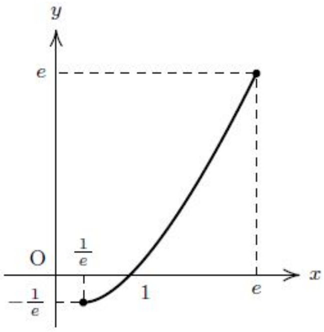
(1) $f(x) = x\log x$ より，

$$f'(x) = \log x + 1,$$
$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

であるから，$\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{e}$	↗	e

これより，$y = f(x)$ のグラフは次のようになる．



(2) 関数 $f(x)$ は単調増加なので，関数 $y = f(x)$ において，x と y が一対一に対応するから，逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する．

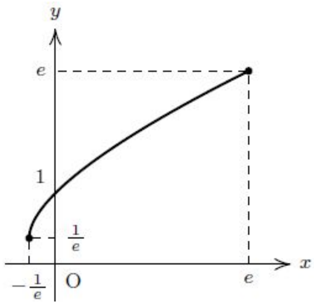
(1) より，逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域は，

$$-\frac{1}{e} \leqq x \leqq e$$

であり，値域は，

$$\frac{1}{e} \leqq y \leqq e.$$

さらに，$y = f^{-1}(x)$ のグラフは次のようになる．



(3) 面積について考えると，

$$\begin{aligned}\int_0^e f^{-1}(x)\,dx &= e^2 - \int_1^e f(x)\,dx \\ &= e^2 - \int_1^e x\log x\,dx \\ &= e^2 - \left[\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e \\ &= \frac{1}{4}(3e^2 - 1).\end{aligned}$$

13-34 (j27-4)

(1)　$x<0$ のとき，e^{-x} と x^2+1 の大小関係を調べよ．

(2)　2つの曲線 $y=xe^{-x}$，$y=x(x^2+1)$ と直線 $x=-1$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1)　$f(x)=e^x(x^2+1)$ とすると，

$$f(x)>0.$$

また，

$$f'(x)=e^x(x+1)^2 \geqq 0$$

であり，$f(0)=1$ であるから，$x<0$ において，

$$0<f(x)<1.$$

よって，

$$e^x(x^2+1)<1$$

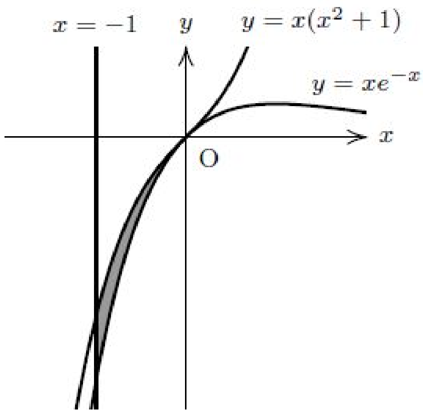
であるから，

$$x^2+1<e^{-x}.$$

(2)　$x<0$ と (1) の結果より，

$$xe^{-x}<x(x^2+1)$$

であるから，2 曲線 $y=xe^{-x}$，$y=x(x^2+1)$ は次のようになる．



したがって，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0} \{x(x^2+1)-xe^{-x}\}\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

13-35 (j29-4)

xy 平面を水平にとり，xz 平面に曲線

$$C\ :\ z=\begin{cases} 0 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ x^2-1 & (1 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

を描く．さらに，C を z 軸のまわりに回転してできる容器に，毎秒 π の割合で水を注ぐ．

(1)　注水を始めてからこの容器がいっぱいになるまでの時間を求めよ．

(2)　注水し始めてから 4 秒後の水面が上昇する速さと，水面の半径が増大する速さを求めよ．

(1)　h と V の関係より，

$$V = \int_0^h \pi x^2 \, dy = \int_0^h \pi y \, dy$$

であるから，

$$\frac{dV}{dh} = \pi h.$$

したがって，

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \pi h \cdot \frac{dh}{dt}$$

であるから，

$$\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$$

より，

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi\sqrt{h}}.$$

(2)　(1) の結果より，

$$\frac{dt}{dh} = -\pi\sqrt{h}$$

であるから，

$$T = \int_1^0 (-\pi\sqrt{h}\,) \, dh = \pi \int_0^1 \sqrt{h} \, dh = \pi \left[\frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi.$$

13-36 (j30-4)

関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ について，次の問に答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ の極値と変曲点を求め，曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2)　曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = -\dfrac{1}{2}x$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1)　$f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ より，

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2},$$

$$f''(x) = \frac{2x(x-1)(x^2-3x+3)}{(x-1)^4}$$

であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	0	↘		↘	$\frac{27}{4}$	↗

これより，$f(x)$ は $x = \dfrac{3}{2}$ のとき，

極小値 $\dfrac{27}{4}$

をもつ．

また，曲線 $y = f(x)$ の変曲点の座標は，

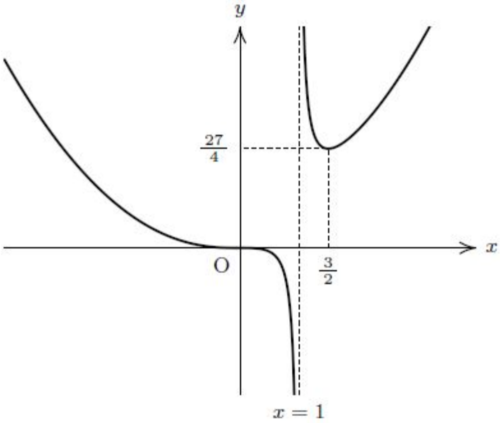
$$(0,\ 0).$$

さらに，

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \infty.$$



(2)　$y=\dfrac{x^3}{x-1}$ と $y=-\dfrac{1}{2}x$ を連立すると，

$$\frac{x^3}{x-1}=-\frac{1}{2}x$$

であるから，

$$x(2x-1)(x+1)=0$$

$$x=-1,\ \ 0,\ \ \frac{1}{2}.$$

したがって，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{x-1}\right)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{x^3}{x-1}-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right\}dx\\&=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}x^2+x+\log|x-1|\right]_0^{-1}\\&\qquad+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}x^2+x+\log|x-1|\right]_0^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{7}{48}.\end{aligned}$$

13-37 (j35-4)

媒介変数表示 $x=\cos\theta$，$y=\cos^2\theta\tan\dfrac{\theta}{2}$ が表す曲線を C とする．ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1)　y を最大にする θ の値を α とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ．

(2)　曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　$y=\cos^2\theta\tan\dfrac{\theta}{2}$ より，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta}&=2\cos\theta(-\sin\theta)\tan\frac{\theta}{2}+\cos^2\theta\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\\&=\frac{-4\sin\theta\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\\&=\frac{\cos\theta(-2\sin^2\theta+\cos\theta)}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\\&=\frac{\cos\theta(2\cos^2\theta+\cos\theta-2)}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

であるから，

$$\cos\beta=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\qquad\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とすると，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における y の増減は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

これより，y は $\theta=\beta$ のとき最大となるから，α の定め方より，

$$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}.$$

(2)　$x=\cos\theta$ より，

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\leqq 0$$

であり，(1) より，$y\geqq 0$ であるから，C と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1 y\,dx\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta\tan\frac{\theta}{2}(-\sin\theta\,d\theta)\qquad(x\text{ の減少性より})\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)\cos^2\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}-\cos\theta+\sin^2\theta\cos\theta\right)d\theta\\&=\left[\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta-\sin\theta+\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

13-38 (j36-4)

関数 $f(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ について考える．$\alpha>1$ のとき，次の問に答えよ．

(1)　方程式 $f(t)=\alpha$ を満たす正の解を T とする．T を α を用いて表せ．

(2)　$x=f(t)$，$y=f'(t)$ とするとき，次の定積分 I の値を α を用いて表せ．

$$I=\int_1^\alpha y\,dx$$

13-39 (j37-5)

微分可能な関数 $f(x)$ が $f(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt$ を満たすとする．

(1)　$f'(x)$ を $f(x)$ で表すと，$\boxed{\textbf{(1)}}$ である．

(2)　$f''(x)$ を $f(x)$ で表すと，$\boxed{\textbf{(2)}}$ である．

(3)　$\log\{f(x)+f'(x)\}=\boxed{\textbf{(3)}}$ である．

(4)　$f(x)=\boxed{\textbf{(4)}}$ である．

13-40 (j40-4)

不等式 $x^2\leqq y\leqq x$ で表される平面上の領域を直線 $y=x$ のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ．

13-41 (j41-1)

関数 $y=e^x$ のグラフの $x\geqq 0$ の部分を C，関数 $y=(e-2)x+2$ のグラフを l とする．

C と l が点 $(1,\ e)$ のみで交わることに注意して，y 軸と C および l とで囲まれる部分を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ．

13-42 (j43-3)

曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ について，$y \leqq 5$ の部分の長さを求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

13-43 (j44-4)

関数 $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \displaystyle\int_1^{2x} (3t - 4x)t \log t \, dt \ (x > 0)$ について，次の問に答えよ．

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について，$f'(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ．

(2)　$f(x)$ の極値を求めよ．

13-44 (j32-5)

定義域が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ である関数 $f(x) = 4\sin x + 2\cos 2x + 1$ の

極大値は $\boxed{\text{ア}}$，　極小値は $\boxed{\text{イウ}}$，　$\boxed{\text{エ}}$

である．

また，$f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると，

$$F(x) = \boxed{\text{オカ}}\cos x + \sin 2x + x + C$$

である．ただし，C は積分定数である．

したがって，

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \boxed{\text{キ}}\pi$$

である．

さらに，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，不等式 $f(x) \leqq 0$ を満たす x の範囲は，

$$\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi \leqq x \leqq \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$$

であるから，

$$\int_0^{2\pi} |\,f(x)\,|\,dx = \boxed{\text{スセ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}} + \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\pi$$

である．