談話室マロニエ

SoyPaste

演習期の数学

11 図形と方程式

11-1 (r4-1)

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(2,\ 1)$, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{11}{5}\right)$, $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円を C_1 とする.

(1) 円 C_1 の方程式を求めよ.

(2) 円 C_1 に内接する正三角形の面積を求めよ.

(3) 円 C_2 : $x^2+y^2=5$ の円周上を動く点 M に対して, 3 点 M, P, Q が三角形を作るとする. このとき, 三角形 MPQ の重心 G の軌跡を求めよ.

(1) C_1 の方程式を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

とすると, C_1 が 3 点 O, P, Q を通ることから,

$$\begin{cases} c=0, \\ 5+2a+b+c=0, \\ 5-\dfrac{2}{5}a-\dfrac{11}{5}b+c=0. \end{cases}$$

これを解くと,

$$a=-4,\quad b=3,\quad c=0$$

であるから, C_1 の方程式は,

$$x^2+y^2-4x+3y=0.$$

(2) (1) の結果より,

$$C_1 : (x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

であるから, C_1 の半径は,

$$\frac{5}{2}.$$

さらに, 円に内接する正三角形の一辺の長さは半径の $\sqrt{3}$ 倍であるから, 求める面積は,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2\sin 60^\circ=\frac{75\sqrt{3}}{16}.$$

(3) 直線 PQ の方程式は,

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$$

であるから, C_2 の方程式と連立すると,

$$x^2+\left(\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}\right)^2=5$$

$$25x^2-40x-20=0$$

$$5(5x+2)(x-2)=0$$

$$x=-\frac{2}{5},\ 2.$$

これより, P, Q は C_2 上にある.

ここで, $\mathrm{M}(a,\ b)$, $\mathrm{G}(X,\ Y)$ とすると,

$$\begin{cases} a^2+b^2=5, \\ (a,\ b)\neq(2,\ 1),\ \left(-\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{11}{5}\right), \\ X=\dfrac{1}{3}\left(a+\dfrac{8}{5}\right), \\ Y=\dfrac{1}{3}\left(b-\dfrac{6}{5}\right) \end{cases}$$

であるから,

$$\left(X-\frac{8}{15}\right)^2+\left(Y+\frac{2}{5}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

$$(X,\ Y)\neq\left(\frac{6}{5},\ -\frac{1}{15}\right),\ \left(\frac{2}{5},\ -\frac{17}{15}\right).$$

以上より, G の軌跡は,

円 $\left(x-\dfrac{8}{15}\right)^2+\left(y+\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{5}{9}$ の

2 点 $\left(\dfrac{6}{5},\ -\dfrac{1}{15}\right)$, $\left(\dfrac{2}{5},\ -\dfrac{17}{15}\right)$ を除く部分.

11-2 (r7-2)

どんな a の値に対してもつねにある定点を通る直線 $(3a-2)x+(a-2)y-a+1=0$ がある．この直線が第 2 象限を通らないためには，定数 a はどんな範囲にあればよいか．

$$(3a-2)x+(a-2)y-a+1=0 \qquad \cdots (*)$$

を a についてまとめると，

$$a(3x+y-1)-2x-2y+1=0.$$

これがどんな a の値に対しても成り立つ条件は，

$$\begin{cases} 3x+y-1=0, \\ -2x-2y+1=0. \end{cases}$$

これを解くと，

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$$

であるから，$(*)$ は定点 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ を通る．

(i)　$a=2$ のとき，$(*)$ は，

$$x=\frac{1}{4}. \qquad \text{(適)}$$

(ii)　$a\neq 2$ のとき，$(*)$ は，

$$y=\frac{2-3a}{a-2}x+\frac{a-1}{a-2}$$

であるから，$(*)$ が第 2 象限を通らないような傾きの条件は，

$$\frac{2-3a}{a-2}\geqq 1.$$

両辺に $(a-2)^2$ を掛けると，

$$(a-2)(2-3a)\geqq (a-2)^2$$

$$4(a-1)(a-2)\leqq 0.$$

$a\neq 2$ より，

$$1\leqq a<2.$$

以上より，求める a の値の範囲は，

$$1\leqq a\leqq 2.$$

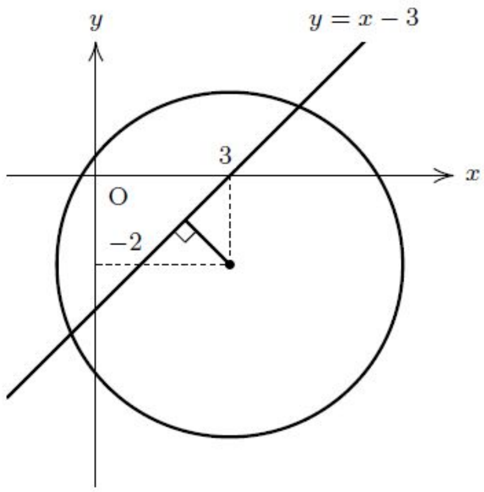
11-3 (r9-1)

円 $x^2+y^2-6x+4y=2$ が直線 $y=x-3$ によって切り取られる弦の長さを求めよ．

円の方程式を変形すると，

$$(x-3)^2+(y+2)^2=15.$$

図示すると，次の図のようになる．



ここで，円の中心 $(3,\ -2)$ と直線

$$y=x-3,$$

すなわち，

$$x-y-3=0$$

との距離を d とすると，

$$d=\frac{|3-(-2)-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$=\sqrt{2}.$$

さらに，弦の長さを L とすると，

$$L=2\sqrt{(\sqrt{15})^2-d^2}$$

であるから，

$$L=2\sqrt{13}.$$

11-4 (r9-2)

3つの実数 x，y，z が，条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$，$x+y+z=1$ を満たしながら変化するとき，$x-2y+4z$ の最大値を求めよ．

$x+y+z=1$ より，

$$y = 1-(x+z)$$

であるから，$y \geqq 0$ より，

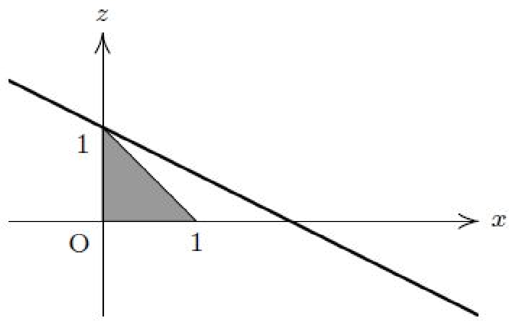
$$x+z \leqq 1.$$

また，$x-2y+4z=k$ とすると，

$$x-2\{1-(x+z)\}+4z=k$$

$$\iff z = -\frac{1}{2}x+\frac{2+k}{6}.$$

これが $x \geqq 0$，$z \geqq 0$，$x+z \leqq 1$ を満たす領域と共有点をもちながら変化するときの z 切片の最大値を考えればよい．



$x-2y+4z$ は $(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1)$ のとき，

最大値 4

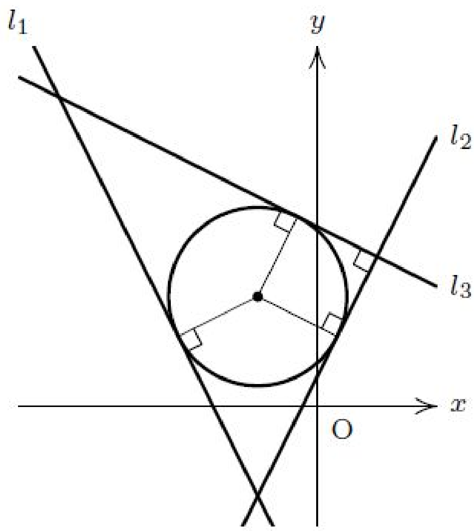
をとる．

11-5 (r14-1)

座標平面上に3直線 l_1 : $2x+y+7=0$，l_2 : $2x-y+1=0$，l_3 : $x+2y-12=0$ がある．

(1)　3直線 l_1，l_2，l_3 で囲まれる三角形の内接円の中心の座標，および，半径を求めよ．

(2)　3直線 l_1，l_2，l_3 に接する円のうちで，半径が最大となる円の中心の座標を求めよ．また，その半径を求めよ．



(1)　内接円の中心の座標を $(a,\ b)$，半径を r とすると，

$$\frac{|2a+b+7|}{\sqrt{5}} = \frac{|2a-b+1|}{\sqrt{5}} = \frac{|a+2b-12|}{\sqrt{5}} = r$$

すなわち，

$$|2a+b+7| = |2a-b+1| = |a+2b-12| = \sqrt{5}r. \quad \cdots (*)$$

ここで，点 $(a,\ b)$ は連立不等式

$$\begin{cases} y > -2x-7, & \text{すなわち，}\quad 2x+y+7>0, \\ y > 2x+1, & \text{すなわち，}\quad 2x-y+1<0, \\ y < -\dfrac{1}{2}x+6, & \text{すなわち，}\quad x+2y-12<0 \end{cases}$$

を満たす領域内にあるから，$(*)$ は，

$$2a+b+7=-(2a-b+1)=-(a+2b-12)=\sqrt{5}\,r.$$

これを解くと，

$$a=-2,\quad b=\frac{11}{3},\quad r=\frac{4\sqrt{5}}{3}$$

なので，内接円の中心の座標は，

$$\left(-2,\ \frac{11}{3}\right)$$

であり，半径は，

$$\frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

(2)　$l_2 \perp l_3$ であるから，半径が最大となる円は，l_1，l_3 の下側かつ l_2 の上側にある．

したがって，$(*)$ において，

$$\begin{cases} 2a+b+7<0, \\ 2a-b+1<0, \\ a+2b-12<0 \end{cases}$$

が成り立つときを考えればよいので，$(*)$ より，

$$2a+b+7=2a-b+1=a+2b-12=-\sqrt{5}\,r.$$

これを解くと，

$$a=-22,\quad b=-3,\quad r=8\sqrt{5}$$

なので，半径が最大となる円の中心の座標は，

$$(-22,\ -3)$$

であり，半径は，

$$8\sqrt{5}.$$

11-6 (r16-1)

a を定数とする．2 つの放物線

$$C_1:y=-x^2,\quad C_2:y=3(x-1)^2+a$$

について，次の問に答えよ．

(1)　C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するための a の条件を求めよ．

(2)　C_1，C_2 の両方に接する 2 本の直線が，直交するときの a の値を求めよ．

(3)　C_1，C_2 の両方に接する 2 本の接線が，$\dfrac{\pi}{4}$ の角度で交わるときの a の値を求めよ．

(1)　C_1 上の点 $(t,\ -t^2)$ における接線の方程式は，

$$y=-2t(x-t)-t^2. \qquad \cdots ①$$

これと C_2 の方程式を連立すると，

$$-2t(x-t)-t^2=3(x-1)^2+a$$

であるから，整理すると，

$$3x^2+2(t-3)x-t^2+a+3=0. \qquad \cdots ②$$

①が C_2 と接する条件は，

$$(②の判別式)=0$$

$$(t-3)^2-3(-t^2+a+3)=0$$

$$4t^2-6t-3a=0. \qquad \cdots ③$$

C_1，C_2 の両方に接する直線が 2 本存在するのは，③が異なる 2 つの実数解をもつときであるから，

$$(-3)^2-4(-3a)>0.$$

よって，求める a の値の範囲は，

$$a>-\frac{3}{4}.$$

---

(2)　③の解を α，β とすると，C_1 の接線の傾きは①より，

$$-2\alpha,\quad -2\beta$$

であるから，直交する条件は，

$$(-2\alpha)(-2\beta)=-1.$$

これより，

$$\alpha\beta=-\frac{1}{4}.$$

これと③より，

$$-\frac{3}{4}a=-\frac{1}{4}$$

であるから，

$$a=\frac{1}{3}.$$

(3)　点 $(\alpha,\ -\alpha^2)$，$(\beta,\ -\beta^2)$ における C_1 の接線と x 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とすると，

$$\tan\theta_1 = -2\alpha, \quad \tan\theta_2 = -2\beta$$

であり，条件より，

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \pm 1.$$

ここで，

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

であるから，

$$\frac{2(\beta - \alpha)}{1 + 4\alpha\beta} = \pm 1.$$

これより，

$$4(\beta - \alpha)^2 = (1 + 4\alpha\beta)^2$$

$$4\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\} = (1 + 4\alpha\beta)^2$$

であるから，③より，

$$4\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3a\right\} = (1 - 3a)^2$$

$$9a^2 - 18a - 8 = 0.$$

これを解くと，

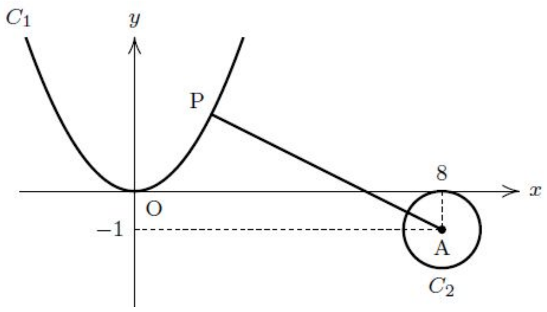
$$a = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{3}.$$

11-7 (r20-2)

放物線 $C_1 : y = \dfrac{1}{2}x^2$ と円 $C_2 : (x-8)^2 + (y+1)^2 = 1$ が与えられている．放物線 C_1 上の動点を P，円 C_2 上の動点を Q とする．

(1)　距離 $\overline{\mathrm{PQ}}$ の最小値を求めよ．

(2)　(1) を満たす点 Q の座標を求めよ．



(1)　C_2 の中心を $\mathrm{A}(8,\ -1)$ とすると，

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PA}} - 1$$

が成り立つので，$\overline{\mathrm{PQ}}$ が最小となるのは $\overline{\mathrm{PA}}$ が最小となるとき．

ここで，C_1 上の点 P の座標を $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ とすると，

$$\overline{\mathrm{PA}}^2 = (t-8)^2 + \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)^2.$$

さらに，

$$f(t) = (t-8)^2 + \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)^2$$

とすると，

$$f'(t) = 2(t-8) + 2\left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)t$$

$$= (t-2)(t^2 + 2t + 8)$$

であるから，$f(t)$ の増減は次のようになる．

t	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗

以上より，$\overline{\mathrm{PQ}}$ の最小値は，

$$3\sqrt{5} - 1.$$

(2)　(1) より，$\overline{\mathrm{PQ}}$ が最小となる P の座標は，

$$\mathrm{P}(2,\ 2).$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3\sqrt{5}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(8,\ -1)+\frac{\sqrt{5}}{15}(-6,\ 3)\\&=\left(8-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ -1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right).\end{aligned}$$

したがって，

$$\mathrm{Q}\left(8-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ -1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

11-8 (r22-2)

xy 平面において，2 点 A(0, 2)，B(1, 2) とする．また，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする．

(1)　動点 P が線分 AB(両端の点を含む) 上を動き，動点 Q が円 C 上を動くとき，線分 PQ の中点 R が存在する範囲の面積を求めよ．

(2)　(1) で定まる R が存在する範囲と円 C との共通部分のうち，その x 座標が最大となる点の座標を求めよ．

(1)　P(k, 2)，Q(s, t) とすると，題意より，

$$0\leqq k\leqq 1,\quad s^2+t^2=1.$$

さらに，R(X, Y) とすると，

$$\begin{cases}X=\dfrac{k+s}{2},\\ Y=\dfrac{2+t}{2}\end{cases}$$

より，

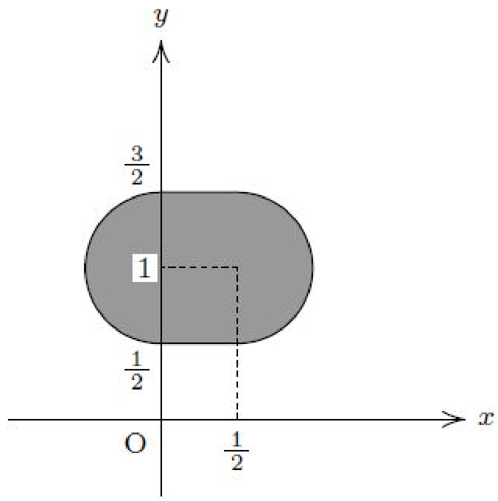
$$\begin{cases}s=2X-k,\\ t=2Y-2.\end{cases}$$

$s^2+t^2=1$ に代入すると，

$$(2X-k)^2+(2Y-2)^2=1$$

$$\left(X-\frac{k}{2}\right)^2+(Y-1)^2=\frac{1}{4}$$

なので，$0\leqq k\leqq 1$ より，R が存在する範囲は次の図の網目部分．ただし，境界を含む．



これより，R が存在する範囲の面積は，

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

(2)　x 座標が最大となるのは，2 円

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4},\quad x^2+y^2=1$$

の共有点のうち，右側の方．

共有点の座標を求めると，

$$(x,\ y)=(0,\ 1),\ \left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$

であるから，x 座標が最大となる点の座標は，

$$\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right).$$

11-9 (j4-4)

xy 平面上に，放物線 C : $y=x^2-2x-6$ と直線 l : $y=x-2$ がある．C と l の 2 つの交点の x 座標の小さい方から順に A，B とする．C 上の点 P が A から B まで動くとき，三角形 APB の重心 G の軌跡を求めよ．

C と l の方程式を連立すると，

$$x^2-2x-6=x-2$$

であるから，

$$x^2-3x-4=0$$

$$(x+1)(x-4)=0$$

$$x=-1,\ 4.$$

したがって，C と l の交点 A，B の座標は，

$$(-1,\ -3),\ (4,\ 2).$$

また，P の定め方より，

$$\mathrm{P}(t,\ t^2-2t-6)$$

$$-1<t<4 \qquad \cdots ①$$

とおける．

ここで，三角形 APB の重心 G の座標を $(X,\ Y)$ とすると，

$$\begin{cases} X=\dfrac{-1+4+t}{3}, \\ Y=\dfrac{-3+2+t^2-2t-6}{3} \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} t=3X-3, \\ Y=\dfrac{1}{3}(t^2-2t-7). \end{cases} \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$\begin{cases} Y=\dfrac{1}{3}\{(3X-3)^2-2(3X-3)-7\}, \\ -1<3X-3<4 \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} Y=3X^2-8X+\dfrac{8}{3}, \\ \dfrac{2}{3}<X<\dfrac{7}{3}. \end{cases}$$

したがって，点 G の軌跡は，

放物線 $y=3x^2-8x+\dfrac{8}{3}$ の $\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{7}{3}$ を満たす部分．

11-10 (s4-2)

xy 平面上の原点を O とする．xy 平面上の O と異なる点 P に対して，直線 OP 上の点 Q を，次の条件 (a)，(b) を満たすようにとる．

(a)　$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 4$

(b)　Q は O に関して P と同じ側にある．

(1)　P，Q の座標をそれぞれ $(x,\ y)$，$(X,\ Y)$ とするとき，x と y をそれぞれ X と Y を用いて表せ．

(2)　点 P が円 $(x-2)^2+y^2=1$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

(1)　条件 (b) と，Q が直線 OP 上の点であることから，

$$\begin{cases} x = kX \\ y = kY \end{cases}$$

を満たす正の実数 k が存在する．

また，条件 (a) より，

$$(x^2+y^2)(X^2+Y^2)=16$$

であるから，

$$k^2(X^2+Y^2)^2=16.$$

$k>0$ より，

$$k=\frac{4}{X^2+Y^2}$$

であるから，

$$\begin{cases} x = \dfrac{4X}{X^2+Y^2}, \\ y = \dfrac{4Y}{X^2+Y^2}. \end{cases}$$

(2)　$(x-2)^2+y^2=1$ に (1) の結果を代入すると，

$$\left(\frac{4X}{X^2+Y^2}-2\right)^2+\left(\frac{4Y}{X^2+Y^2}\right)^2=1.$$

$X^2+Y^2 \neq 0$ であることに注意して整理すると，

$$\left(X-\frac{8}{3}\right)^2+Y^2=\frac{16}{9}.$$

したがって，Q の軌跡は，

$$円\ \left(x-\frac{8}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}.$$

11-11 (s5-4)

xy 平面上に円 C : $x^2+(y+2)^2=4$ がある．中心 $(a,\ 0)$，半径 1 の円を D とする．C と D が異なる 2 点で交わるとき，次の問に答えよ．

(1)　a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　a が (1) で求めた範囲を変化するとき，C と D の 2 つの交点を通る直線が通過する領域を図示せよ．

(1)　C とが異なる 2 点で交わる条件は，

$$2-1<\sqrt{(a-0)^2+\{0-(-2)\}^2}<2+1$$

であるから，a のとり得る値の範囲は，

$$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}.$$

(2)　D の方程式は，

$$(x-a)^2+y^2=1$$

であるから，C と D の 2 つの交点を通る直線の方程式は，

$$\{x^2+(y+2)^2-4\}-\{(x-a)^2+y^2-1\}=0,$$

すなわち，

$$y=\frac{a^2}{4}-\frac{x}{2}a-\frac{1}{4}.$$

ここで，

$$f(a)=\frac{a^2}{4}-\frac{x}{2}a-\frac{1}{4}$$

とすると，

$$f(a)=\frac{1}{4}(a-x)^2-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}.$$

これより，放物線 $y=f(a)$ の軸 $a=x$ と区間 $-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ との位置関係で場合分けをする．

これより，放物線 $y=f(a)$ の軸 $a=x$ と区間 $-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ との位置関係で場合分けをする．

(i)　$x\leqq-\sqrt{5}$ のとき，

$$f(-\sqrt{5})<y<f(\sqrt{5})$$

であるから，

$$\frac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1.$$

(ii)　$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ のとき，

$$f(x)\leqq y<\max\{f(-\sqrt{5}),\ f(\sqrt{5})\}$$

であるから，

$$-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\leqq y<\max\left\{\frac{\sqrt{5}}{2}x+1,\quad-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1\right\}.$$

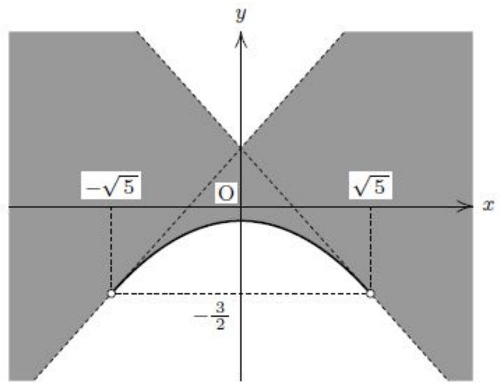
(iii)　$x\geqq\sqrt{5}$ のとき，

$$f(\sqrt{5})<y<f(-\sqrt{5})$$

であるから，

$$-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1<y<\frac{\sqrt{5}}{2}x+1.$$

以上より，求める領域を図示すると，次の図の網目部分である．ただし，境界は放物線 $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$ 上の $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ の部分を含む．



11-12 (s6-4)

(1)　点 $(3,\ 3)$ における円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ の接線の方程式を求めよ．

(2)　次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)\geqq\log_{\frac{1}{2}}y\\ \log_2(x^2+y^2-4x-2y+5)\leqq\log_2 5\end{cases}$$

(3)　a を正の定数とする．点 $(x,\ y)$ が (2) で求めた領域を動くとき，$ax+y$ の最大値が 4 になるように a の値を定めよ．

(1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ より，

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5$$

なので，

$$\mathrm{A}(3,\ 3),\ \mathrm{B}(2,\ 1)$$

とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -2).$$

求める接線は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を法線ベクトルとし，点 A を通る直線であるから，その方程式は，

$$-(x-3)-2(y-3)=0,$$

すなわち，

$$x+2y-9=0.$$

(2)　真数が正であることから，

$$\begin{cases} 2x-3>0, \\ y>0, \\ x^2+y^2-4x-2y+5>0. \end{cases}$$

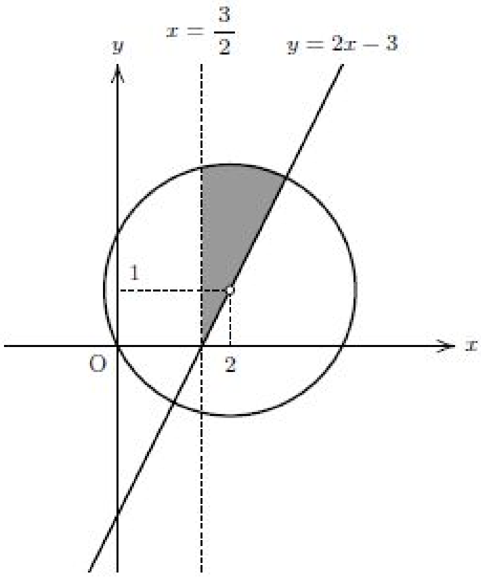
したがって，

$$\begin{cases} x>\dfrac{3}{2}, \\ y>0, \\ (x-2)^2+(y-1)^2>0. \end{cases}$$

また，連立不等式より，

$$\begin{cases} y \geqq 2x-3, \\ (x-2)^2+(y-1)^2 \leqq 5. \end{cases}$$

以上より，連立不等式の表す領域は次の図の網目部分である．ただし，境界は直線 $x=\dfrac{3}{2}$ 上と点 $(2,\ 1)$ を含まない．



(3)　$ax+y=k$ とすると，

$$y=-ax+k$$

であり，$a>0$ であるから，最大値が 4 となるのは (1) より，点 $(0,\ 4)$ から (2) で求めた領域内で，

$$円\ x^2+y^2-4x-2y=0$$

に接線を引いたときである．

このとき，$k=4$ であるから，

$$\frac{|2a+1-4|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5}$$

$$(2a-3)^2=5(a^2+1)$$

$$a^2+12a-4=0.$$

$a>0$ より，求める a の値は，

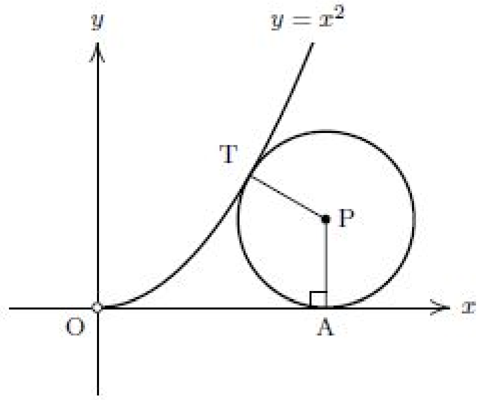
$$a=-6+2\sqrt{10}.$$

11-13 (j7-4)

曲線 $y=x^2$ $(x>0)$ を C_1 とする．この C_1 と x 軸の両方に接し，半径が $\dfrac{1}{2}$ の円を C_2 とする．

(1)　C_2 の方程式を求めよ．

(2)　C_2 の外部において，C_1 と C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．



(1)　C_2 の半径が $\dfrac{1}{2}$ であるから，C_2 の中心 P の座標は，

$$\left(p,\ \frac{1}{2}\right)$$

とおける．

さらに，C_1 と C_2 の接点 T の座標を $(t,\ t^2)$ とすると，T における C_1 の接線の方向ベクトル $\overrightarrow{d}$ は，

$$\overrightarrow{d}=(1,\ 2t).$$

$\overrightarrow{d}\perp\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ より，

$$1\cdot(t-p)+2t\left(t^2-\frac{1}{2}\right)=0$$

であるから，

$$p=2t^3. \qquad \cdots ①$$

また，$\mathrm{PT}=\dfrac{1}{2}$ より，

$$(t-p)^2+\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}. \qquad \cdots ②$$

①，②と $t>0$ より，

$$p=\frac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad t=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから，C_2 の方程式は，

$$\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

(2)　C_1 と C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると，

$$\angle\mathrm{APT}=120^\circ$$

であることから，

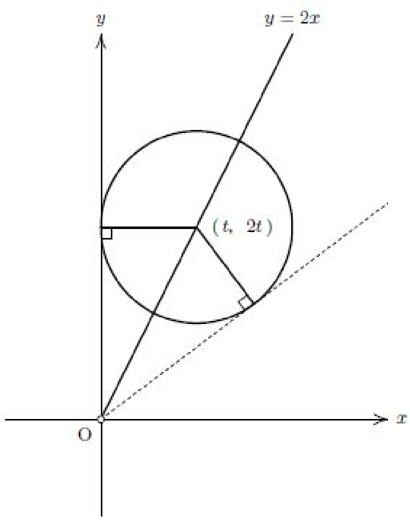
$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2\,dx+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\pi$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{32}-\frac{\pi}{12}.$$

11-14 (j9-2)

正の実数 t に対して方程式

$$x^2+y^2-2tx-4ty+4t^2=0$$

で表される円を C_t とする．t がどのような正の値でも C_t と接する直線の方程式を求めよ．



C_t の方程式を変形すると，

$$(x-t)^2+(y-2t)^2=t^2$$

であるから，C_t の中心の座標は，

$$(t,\ 2t)$$

であり，半径は $t>0$ より，

$$t.$$

これより，y 軸は t がどのような正の値でも C_t と接する．

さらに，C_t の中心の軌跡は，

$$\text{半直線}\ y=2x \quad (x>0).$$

以上より，y 軸以外で，t がどのような正の値でも C_t と接する直線が存在するならば，その直線は原点を通るので，

$$y = mx$$

とおける．

この直線が C_t に接する条件は，

$$\frac{|mt-(-2t)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = t$$

であるから，$t>0$ より，

$$(m+2)^2 = m^2+1$$

$$4m = 3.$$

したがって，

$$m = \frac{3}{4}.$$

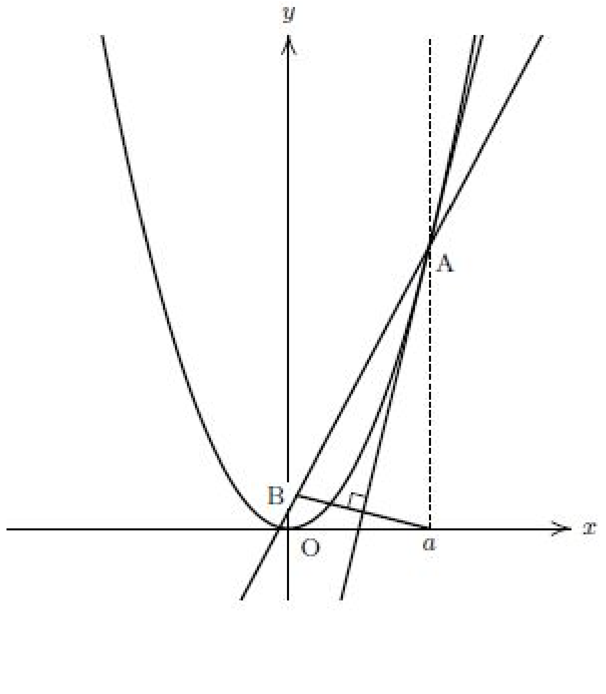
以上より，t がどのような正の値でも C_t と接する直線は，

$$x = 0 \text{ と } y = \frac{3}{4}x.$$

11-15 (s9-2)

a は 0 でない実数とする．放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ を A とし，点 A における C の接線を l とする．また，x 軸上の点 $(a,\ 0)$ の l に関して対称な点を B とし，2 点 A，B を通る直線を m とする．

このとき，直線 m が a の値によらず，必ず通過する点の座標を求めよ．



l の方程式は，

$$y = 2ax - a^2.$$

ここで，

$$\mathrm{B}(p,\ q)$$

とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{q}{p-a}\cdot(2a) = -1, \\ \dfrac{q}{2} = 2a\cdot\dfrac{p+a}{2} - a^2 \end{cases}$$

が成り立つから，

$$\begin{cases} p = \dfrac{a}{4a^2+1}, \\ q = \dfrac{2a^2}{4a^2+1}. \end{cases}$$

これより，直線 m の傾きは，

$$\frac{4a^2-1}{4a}$$

であるから，m の方程式は，

$$y = \frac{4a^2-1}{4a}x + \frac{1}{4}.$$

したがって，m は，

$$\text{定点}\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$$

を通る．

11-16 (s10-2)

円 C_1 : $x^2+y^2=1$ と円 C_2 : $(x-2)^2+(y-4)^2=5$ とに点Pから接線を引く．Pから C_1 の接点までの距離と C_2 の接点までの距離の比が 1 : 2 にあるとする．このとき，Pの軌跡を求めよ．

Pから C_1 に引いた接線の接点を T_1，Pから C_2 に引いた接線の接点を T_2 とすると，条件より，

$$PT_1 : PT_2 = 1 : 2$$

であるから，

$$PT_2 = 4PT_1{}^2.$$

ここで，$P(X,\ Y)$ とすると，

$$(X-2)^2+(Y-4)^2-5=4(X^2+Y^2-1)$$

であるから，

$$3X^2+3Y^2+4X+8Y-19=0.$$

よって，

$$\left(X+\frac{2}{3}\right)^2+\left(Y+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{77}{9}$$

であるから，Pの軌跡は，

$$円\ \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{77}{9}.$$

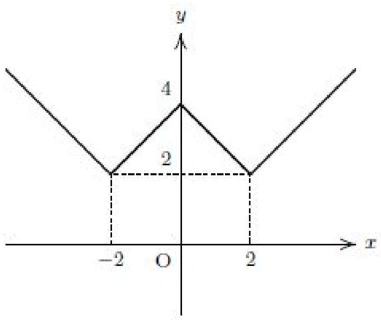
11-17 (j11-2)

$y=|x-2|-|x|+|x+2|$ のグラフと3点で接する円の中心の座標および半径を求めよ．

x の値で場合分けすると，

$$y=\begin{cases} -(x-2)-(-x)-(x+2)=-x & (x<-2 のとき), \\ -(x-2)-(-x)+(x+2)=x+4 & (-2\leqq x<0 のとき), \\ -(x-2)-x+(x+2)=-x+4 & (0\leqq x<2 のとき), \\ (x-2)-x+(x+2)=x & (2\leqq x のとき) \end{cases}$$

であるから，$y=|x-2|-|x|+|x+2|$ のグラフは次の図のようになる．



ここで，$y=|x-2|-|x|+|x+2|$ のグラフ C は y 軸に関して対称であるから，C と3点で接する円の中心は y 軸上にあり，点 $(0,\ 4)$ を通る円である．

これより，求める円 D の中心の座標は $(0,\ t)\ (t>4)$ とおけ，このとき，円 D の半径は，

$$t-4.$$

このとき，円 D が直線 $y=x$ と接する条件は，

$$\frac{|0-t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=t-4$$

であるから，

$$(-t)^2=2(t-4)^2$$

$$t^2-16t+32=0$$

$$t=8\pm4\sqrt{2}.$$

$t>4$ なので，

$$t=8+4\sqrt{2}.$$

したがって，求める円の中心の座標は，

$$(0,\ \ 8+4\sqrt{2}\,)$$

であり，半径は，

$$4+4\sqrt{2}.$$

11-18 (j11-4)

曲線 $y=x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする．ただし，$a<0<b$ とする．

(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ．

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形を PRQS とする．折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ を満たしながら P と Q が動くとき，(2) で求めた面積の最小値を求めよ．

(1) P，Q における接線の方程式はそれぞれ，

$$\begin{cases} y=2ax-a^2, \\ y=2bx-b^2 \end{cases}$$

であるから，

$$\mathrm{R}\left(\frac{a+b}{2},\ ab\right).$$

これより，

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(-\frac{b-a}{2},\ \ -a(b-a)\right),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(\frac{b-a}{2},\ \ b(b-a)\right)$$

であるから，

$$\triangle\mathrm{PRQ}=\frac{1}{4}(b-a)^3.$$

(2) 四角形 PRQS が平行四辺形であるから，

$$\triangle\mathrm{PSQ}=\triangle\mathrm{PRQ}.$$

また，直線 PQ と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積は，

$$\int_a^b\{(a+b)x-ab-x^2\}\,dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(b-a)^3.$$

以上より，求める面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{4}(b-a)^3+\frac{1}{6}(b-a)^3$$
$$=\frac{5}{12}(b-a)^3.$$

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ より，

$$2a\cdot 2b=-1$$

であるから，

$$a=-\frac{1}{4b}.$$

(2) の結果より，

$$S=\frac{5}{12}\left(b+\frac{1}{4b}\right)^3.$$

$b>0$ より，

$$b+\frac{1}{4b}\geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{4b}}=1$$

であるから，

$$S\geqq\frac{5}{12}.$$

等号は $b=\dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ．

以上より，S の最小値は，

$$\frac{5}{12}.$$

11-19 (s11-3)

面積が1である三角形OABの辺OA上に点M，辺OB上に点Nをとり，線分ANと線分BMの交点をPとして三角形PMNの面積について考える．三角形OMNの面積が $\dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}}=s$ とする．

(1)　三角形PMNの面積を s を用いて表せ．

(2)　三角形OMNの面積が $\dfrac{1}{3}$ という条件を満たしながら，M，Nが動くとき，三角形PMNの面積が最大となる s の値を求めよ．

(1)　三角形OAB，OMNの面積について，

$$\frac{\triangle\mathrm{OMN}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}}\cdot\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OB}}$$

が成り立つから，条件より，

$$\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3s}.$$

さらに，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PN}}\cdot\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{BO}}\cdot\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MA}}=1$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PN}}\cdot\frac{3s-1}{3s}\cdot\frac{s}{1-s}=1.$$

よって，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PN}}=\frac{3-3s}{3s-1}.$$

また，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PMN}&=\triangle\mathrm{AMN}\times\frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{AN}}\\&=\left(\triangle\mathrm{OMN}\times\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{OM}}\right)\times\frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{AN}}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PMN}&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-s}{s}\cdot\frac{3s-1}{2}\\&=\frac{(1-s)(3s-1)}{6s}.\end{aligned}$$

(2)　(1) の結果より，

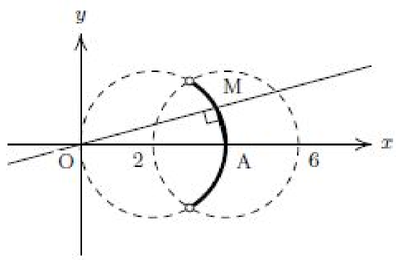
$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PMN}&=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(3s+\frac{1}{s}\right)\\&\leqq\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\cdot2\sqrt{3s\cdot\frac{1}{s}}\qquad\cdots(*)\\&=\frac{2-\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

であり，(*) の等号は $s=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき成り立つので，三角形PMNの面積が最大となる s の値は，

$$s=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

11-20 (j14-2)

原点Oを通る直線が円 $(x-4)^2+y^2=4$ と異なる2点P，Qで交わるとき，線分PQの中点Mの描く曲線の長さを求めよ．



円 $(x-4)^2+y^2=4$ の中心をA(4，0)とすると，

$$\angle\mathrm{OMA}=90^\circ$$

が成り立つから，点Mは線分OAを直径とする円周上の点である．

また，点Mの存在する領域は円の内部に限るから，点Mの描く曲線は図の太線部分である．ただし，両端は除く．

したがって，求める長さは，

$$2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi.$$

11-21 (s17-1)

　x 軸の正の部分を動く点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ $(t>0)$ と 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 3)$，$\mathrm{B}(0,\ 7)$ がある．

(1) 3 点 A，B，P を通る円の中心の座標を t を用いて表せ．

(2) 2 点 A，B を通り，x 軸の正の部分に接する円の方程式を求めよ．

(3) $\angle\mathrm{APB}$ の大きさを最大にする点 P の x 座標を求めよ．

(1) 3 点 A，B，P を通る円の中心は線分 AB の垂直二等分線 $y=5$ 上にある．

したがって，円の中心の座標は $\mathrm{Q}(q,\ 5)$ とおける．

このとき，$\mathrm{AQ}=\mathrm{PQ}$ より，

$$(0-q)^2+(3-5)^2=(t-q)^2+(0-5)^2$$

であるから，

$$q^2+4=t^2-2tq+q^2+25$$
$$2tq=t^2+21$$
$$q=\frac{t^2+21}{2t}.$$

したがって，円の中心の座標は，

$$\left(\frac{t^2+21}{2t},\ 5\right).$$

(2) 題意の円は，(1) の円のうち，点 P で x 軸と接する円であるから，

$$\frac{t^2+21}{2t}=t.$$

これと，$t>0$ より，

$$t=\sqrt{21}$$

であるから，求める円の方程式は，

$$(x-\sqrt{21})^2+(y-5)^2=25.$$

(3) 三角形 APB の外接円の半径を R とし，三角形 APB に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}=2R$$

であるから，

$$\sin\angle\mathrm{APB}=\frac{2}{R}.$$

これと，$\angle\mathrm{APB}$ が鋭角であることから，

$$\angle\mathrm{APB}\text{ が最大} \iff R\text{ が最小}$$

が成り立つ．

3 点 A，B，P を通る円のうち，R が最小となる円は，(2) で求めた円であるから，点 P の x 座標は，

$$\sqrt{21}.$$

11-22 (j18-2)

　xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分 (両端を含む) を L とする．曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ．

原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分は，

$$y=2x\quad(0\leqq x\leqq 1).$$

これと $y=x^2+ax+b$ を連立すると，

$$x^2+ax+b=2x$$

であるから，

$$b=-x^2+(2-a)x.$$

ここで，

$$f(x)=-x^2+(2-a)x$$

とすると，

$$f(x)=-\left(x-\frac{2-a}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(2-a)^2.$$

(ⅰ) $\dfrac{2-a}{2}<0$，すなわち，$a>2$ のとき，

$$f(1)\leqq f(x)\leqq f(0)$$

であるから，

$$-a+1\leqq b\leqq 0.$$

(ⅱ) $0\leqq\dfrac{2-a}{2}\leqq 1$，すなわち，$0\leqq a\leqq 2$ のとき，

$$\min\{f(0),\ f(1)\}\leqq f(x)\leqq f\left(\frac{2-a}{2}\right)$$

であるから，

$$\min\{0,\ -a+1\}\leqq b\leqq\frac{1}{4}(a-2)^2.$$

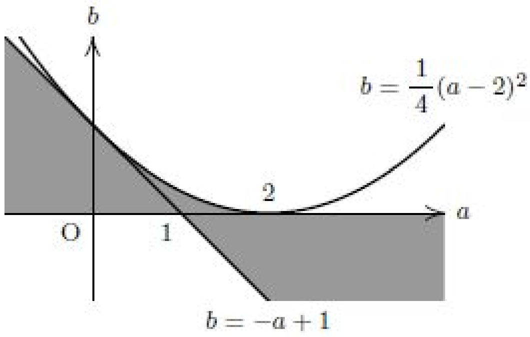
(ⅲ) $\dfrac{2-a}{2}>1$，すなわち，$a<0$ のとき，

$$f(0)\leqq f(x)\leqq f(1)$$

であるから，

$$0\leqq b\leqq -a+1.$$

以上より，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示すると，次の図の網目部分である．ただし，境界を含む．



11-23 (j21-2)

k は正の実数とする．点 $(3k,\ 4k)$ を中心とする半径 $5k+1$ の円を C_k とする．

(1) 円 C_k が原点を通るか．

(2) k がすべての正の実数値をとって変化するとき，円 C_k の動く範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

C_k の方程式は，

$$(x-3k)^2+(y-4k)^2=(5k+1)^2.$$

(1) C_k が原点を通る条件は，

$$(0-3k)^2+(0-4k)^2=(5k+1)^2$$

を満たす正の実数 k が存在することであるが，

$$k=-\frac{1}{10}$$

であるから，不適．

したがって，C_k は原点を通らない．

(2) C_k の方程式を変形すると，

$$2(3x+4y+5)k-(x^2+y^2-1)=0.$$

ここで，

$$f(k)=2(3x+4y+5)k-(x^2+y^2-1)$$

とし，$3x+4y+5$ の値で場合分けをして，方程式 $f(k)=0$ が正の実数解をもつ条件を考える．

(i) $3x+4y+5=0$ のとき，条件は，

$$f(0)=0$$

であるから，

$$x^2+y^2=1.$$

(ii) $3x+4y+5>0$ のとき，条件は，

$$f(0)<0$$

であるから，

$$x^2+y^2>1.$$

(iii) $3x+4y+5<0$ のとき，条件は，

$$f(0)>0$$

であるから，

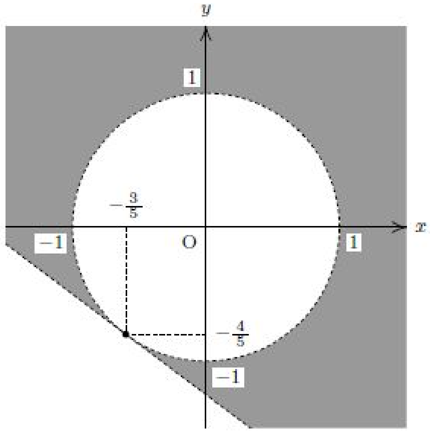
$$x^2+y^2<1.$$

以上より，円 C_k の動く領域は次のようになる．

$$\begin{cases} 3x+4y+5=0\text{ のとき，} & x^2+y^2=1, \\ 3x+4y+5>0\text{ のとき，} & x^2+y^2>1, \\ 3x+4y+5<0\text{ のとき，} & x^2+y^2<1. \end{cases}$$

これを図示すると，次の図の網目部分である．

ただし，境界は点 $\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$ 以外は含まない．



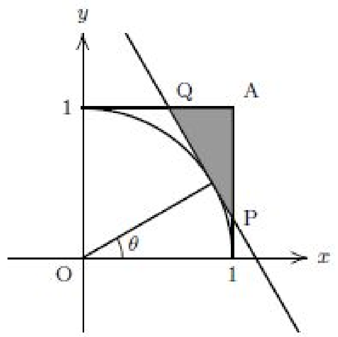
11-24 (j25-5)

座標平面上に，原点を中心とする半径1の円 C と，C に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形 T がある．C 上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線と T の隣接する2辺がなす三角形を K とする．

(1) K の3辺の長さの和は $\boxed{(1)}$ である．

(2) K の面積は $\theta=\boxed{(2)}$ のとき，最大値 $\boxed{(3)}$ をとる．

図のように，三角形 K の3つの頂点を A，P，Q とする．



(1) 点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線の方程式は，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

であるから，

$$\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta},\ 1\right).$$

これより，

$$\begin{cases} \mathrm{AP}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}, \\ \mathrm{AQ}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\cos\theta}, \\ \mathrm{PQ}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta} \end{cases}$$

であるから，K の3辺の長さの和は，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}+\mathrm{AQ}+\mathrm{PQ}&=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)(\sin\theta+\cos\theta+1)}{\sin\theta\cos\theta}\\&=2.\end{aligned}$$

(2) (1) より，

$$\triangle\mathrm{APQ}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}.$$

ここで，

$$\sin\theta+\cos\theta=t$$

とすると，

$$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$1<t\leqq\sqrt{2}.$$

また，

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$

であるから，

$$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{APQ}&=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}\\&=\frac{t-1}{t+1}\\&=1-\frac{2}{t+1}.\end{aligned}$$

以上より，K の面積は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，

最大値 $(\sqrt{2}-1)^2$

をとる．

11-25 (s25-1)

実数 t に対して2点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える．t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ．

点 P，Q の定め方より，線分 PQ は，

$$\begin{cases} y=(2t+1)x-t^2-t, \\ t \leqq x \leqq t+1 \end{cases}$$

と表すことができる．

ここで，

$$f(t)=(2t+1)x-t^2-t$$

とすると，

$$\begin{aligned} f(t)&=-t^2+(2x-1)t+x \\ &=-\left\{t-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+x \\ &=-\left\{t-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+x^2+\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

また，$-1 \leqq t \leqq 0$ のとき，$t \leqq x \leqq t+1$ より，

$$-1 \leqq x \leqq 1$$

であるから，この範囲にある x の値で場合分けして，線分 PQ が通過してできる図形を求める．

(i)　$-1 \leqq x \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$-\frac{3}{2} \leqq x-\frac{1}{2} \leqq -1$$

であり，t の範囲は $x-1 \leqq t \leqq x$ かつ $-1 \leqq t \leqq 0$ より，

$$-1 \leqq t \leqq x$$

であるから，

$$f(x) \leqq f(t) \leqq f(-1).$$

したがって，

$$x^2 \leqq y \leqq -x.$$

(ii)　$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 0$ のとき，

$$-1 \leqq x-\frac{1}{2} \leqq -\frac{1}{2}$$

であり，t の範囲は $x-1 \leqq t \leqq x$ かつ $-1 \leqq t \leqq 0$ より，

$$-1 \leqq t \leqq x$$

であるから，

$$f(x) \leqq f(t) \leqq f\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

したがって，

$$x^2 \leqq y \leqq x^2+\frac{1}{4}.$$

(iii)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，

$$-\frac{1}{2} \leqq x-\frac{1}{2} \leqq 0$$

であり，t の範囲は $x-1 \leqq t \leqq x$ かつ $-1 \leqq t \leqq 0$ より，

$$x-1 \leqq t \leqq 0$$

であるから，

$$f(x-1) \leqq f(t) \leqq f\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

したがって，

$$x^2 \leqq y \leqq x^2+\frac{1}{4}.$$

(iv)　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のとき，

$$0 \leqq x-\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2}$$

であり，t の範囲は $x-1 \leqq t \leqq x$ かつ $-1 \leqq t \leqq 0$ より，

$$x-1 \leqq t \leqq 0$$

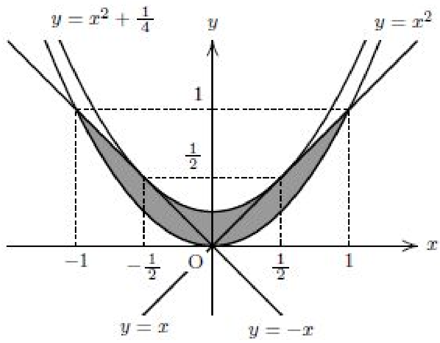
であるから，

$$f(x-1) \leqq f(t) \leqq f(0).$$

したがって，

$$x^2 \leqq y \leqq x.$$

以上より，線分 PQ が通過してできる図形は次の図の網目部分である．



したがって，求める面積を S とすると，対称性より，

$$\begin{aligned} S&=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}-x^2\right)dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\,dx \\ &=2\left[\frac{x}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}}+2\left[\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &=\frac{5}{12}. \end{aligned}$$

11-26 (j30-1)

2 円 $x^2+y^2-24x-10y+44=0$，$x^2+y^2-4x+10y+4=0$ の 2 つの交点を P，Q とするとき，線分 PQ の長さを求めよ．

2 円の方程式を連立すると，

$$-20x-20y+40=0$$

であるから，直線 PQ の方程式は，

$$y=-x+2.$$

これと円

$$x^2+y^2-4x+10y+4=0$$

の方程式を連立すると，

$$x^2+(-x+2)^2-4x+10(-x+2)+4=0$$

$$2x^2-18x+28=0$$

$$2(x^2-9x+14)=0$$

$$2(x-2)(x-7)=0$$

であるから，

$$x=2,\ 7.$$

したがって，

$$\mathrm{PQ}=5\sqrt{2}.$$

11-27 (s30-1)

a，t を実数とするとき，座標平面において，

$$x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$$

で定義される図形 C を考える．

(1) すべての t に対して C が円であるような a の範囲を求めよ．ただし，点は円と見なさないものとする．

(2) $a=4$ とする．t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ．

(1) $$x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0 \quad \cdots (*)$$

を変形すると，

$$(x-t)^2+(y-t)^2=2t^2-at+4$$

であるから，C が円である条件は，

$$2t^2-at+4>0.$$

これより，

$$2\left(t-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}+4>0$$

であるから，すべての t に対して，これが成り立つ条件は，

$$-\frac{a^2}{8}+4>0.$$

したがって，求める a の範囲は，

$$-4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}.$$

(2) $a=4$ のとき，$(*)$ の左辺を $f(t)$ とすると，

$$f(t)=-(2x+2y-4)t+x^2+y^2-4.$$

C が通過する領域は方程式 $f(t)=0$ が $t>0$ に少なくとも 1 つの解をもつ $(x,\ y)$ の範囲と一致する．

(i) $-(2x+2y-4)<0$，すなわち，$y>-x+2$ のとき，

$f(0)>0$ より，

$$x^2+y^2>4.$$

(ii) $-(2x+2y-4)=0$，すなわち，$y=-x+2$ のとき，

$f(0)=0$ より，

$$x^2+y^2=4.$$

(iii) $-(2x+2y-4)>0$，すなわち，$y<-x+2$ のとき，

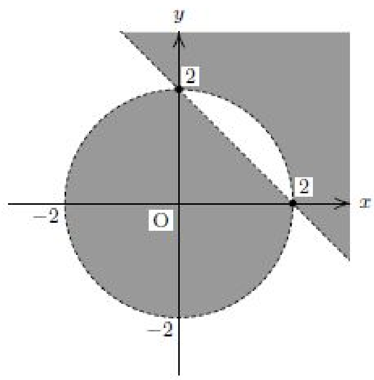
$f(0)<0$ より，

$$x^2+y^2<4.$$

以上より，C が通過する範囲は，

$$\begin{cases} y>-x+2\text{ のとき，} & x^2+y^2>4, \\ y=-x+2\text{ のとき，} & x^2+y^2=4, \\ y<-x+2\text{ のとき，} & x^2+y^2<4. \end{cases}$$

これを図示すると，次の図の網目部分である．ただし，境界線上の点は $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$ 以外は含まない．



11-28 (s31-1)

2つの曲線

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2},\qquad x=\frac{1}{4}y^2-1$$

について，次の問に答えよ．

(1) 2曲線の交点の座標を求めよ．

(2) (1)で求めた交点において，2曲線の接線のなす角 θ を求めよ．

ただし，θ は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) 2曲線の方程式を連立すると，

$$x=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)^2-1$$

であるから，

$$16(x+1)=(x^2-1)^2$$
$$(x+1)\{(x+1)(x-1)^2-16\}=0$$
$$(x+1)(x-3)(x^2+2x+5)=0.$$

x は実数であるから，

$$x=-1,\ \ 3.$$

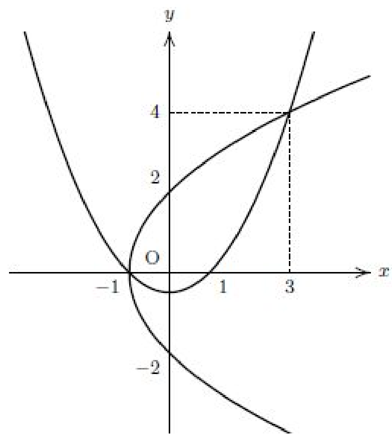
これより，2曲線の交点の座標は，

$$(-1,\ 0),\quad (3,\ 4).$$

(2) (1)より，2曲線

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2},\qquad \cdots ①$$
$$x=\frac{1}{4}y^2-1\qquad \cdots ②$$

の位置関係は次の図のようになる．



①，②より，

$$\frac{dy}{dx}=x,\qquad \cdots ③$$
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}y.\qquad \cdots ④$$

2曲線の交点をPとし，点Pにおける曲線①，②の接線の方向ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{d_1}$，$\overrightarrow{d_2}$ とする．

(i) P$(-1,\ 0)$ のとき，

③より，$\overrightarrow{d_1}\,/\!/\,(1,\ -1)$ であり，④より，$\overrightarrow{d_2}\,/\!/\,(0,\ 1)$ であるから，θ の定め方より，

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

(ii) P$(3,\ 4)$ のとき，

③より，$\overrightarrow{d_1}\,/\!/\,(1,\ 3)$ であり，④より，$\overrightarrow{d_2}\,/\!/\,(2,\ 1)$ であるから，θ の定め方より，

$$\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

以上より，

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

11-29 (j34-5)

実数 t に対して，$f(t)=\dfrac{t+|t|}{2}$ とする．このとき，座標平面において

$$\frac{1}{4}x^2-1 \leqq y \leqq f(2-x^2)$$

が表す領域を図示し，その面積を求めよ．

$f(t)$ の定め方より，

$$f(t)=\begin{cases} t & (t \geqq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (t<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

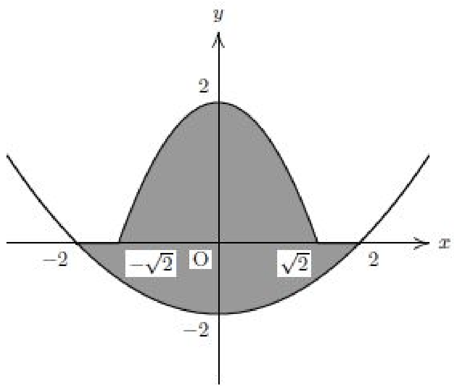
であるから，

$$f(2-x^2)=\begin{cases} 2-x^2 & (-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2} \text{ のとき}), \\ 0 & (x<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<x \text{ のとき}). \end{cases}$$

これより，

$$\frac{1}{4}x^2-1 \leqq y \leqq f(2-x^2)$$

で表される領域を図示すると，次の図の網目部分である．



したがって，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2-x^2)\,dx+\int_{-2}^{2}\left\{0-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx \\ &= \frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot 4^3 \\ &= \frac{8}{3}(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

11-30 (j37-4)

a，b，m を正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ から直線 $y=mx$ へ下ろした垂線の足を A' とし，x 軸に関して A' と対称な点を P とする．また，点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ から直線 $y=mx$ へ下ろした垂線の足を B' とし，y 軸に関して B' と対称な点を Q とする．

(1) 点 P，Q のそれぞれの座標を求めよ．

(2) 線分 PQ を 2 : 1 に内分する点を R とするとき，R の座標を求めよ．

(3) m の値がすべての正の実数を変化するとき，R の軌跡を求め，それを図示せよ．

(1)　直線 $\mathrm{AA'}$ は A を通り直線 $y=mx$ と垂直なので，

$$y=-\frac{1}{m}(x-a).$$

これと $y=mx$ の交点の座標は，

$$mx=-\frac{1}{m}(x-a)$$

$$x=\frac{a}{m^2+1}$$

なので，y 座標は，

$$y=\frac{am}{m^2+1}.$$

したがって，

$$\mathrm{A'}\left(\frac{a}{m^2+1},\ \frac{am}{m^2+1}\right).$$

同様にすると，

$$\mathrm{B'}\left(\frac{bm}{m^2+1},\ \frac{bm^2}{m^2+1}\right).$$

さらに，P，Q の定め方より，

$$\mathrm{P}\left(\frac{a}{m^2+1},\ -\frac{am}{m^2+1}\right),\quad \mathrm{Q}\left(-\frac{bm}{m^2+1},\ \frac{bm^2}{m^2+1}\right).$$

(2)　R の定め方より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

であるから，(1) の結果より，

$$\mathrm{R}\left(\frac{a-2mb}{3(m^2+1)},\ -\frac{m(a-2mb)}{3(m^2+1)}\right).$$

(3)　$\mathrm{R}(X,\ Y)$ とすると，(2) の結果より，

$$X=\frac{a-2mb}{3(m^2+1)}, \qquad \cdots ①$$

$$Y=-\frac{m(a-2mb)}{3(m^2+1)} \qquad \cdots ②$$

であるから，

$$Y=-mX.$$

（i）　$X\neq 0$ のとき，

$$m=-\frac{Y}{X}.$$

①に代入すると，

$$X=\frac{a+\dfrac{2bY}{X}}{3\left(\dfrac{Y^2}{X^2}+1\right)}=\frac{aX^2+2bXY}{3(X^2+Y^2)}$$

であるから，

$$3X(X^2+Y^2)=aX^2+2bXY.$$

$X\neq 0$ より，

$$X^2+Y^2-\frac{a}{3}X-\frac{2}{3}bY=0$$

$$\left(X-\frac{a}{6}\right)^2+\left(Y-\frac{b}{3}\right)^2=\frac{a^2+4b^2}{36}.$$

また，$m>0$ より，

$$-\frac{Y}{X}>0$$

なので，

$$XY<0.$$

（ii）　$X=0$ のとき，①より，

$$a-2mb=0$$

であるから，②より，

$$Y=0.$$

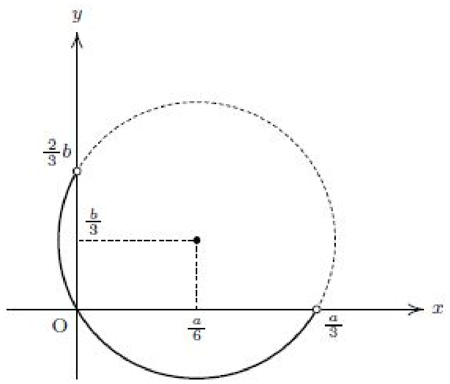
（i），（ii）より，R の軌跡は，

円 $\left(x-\dfrac{a}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{b}{3}\right)^2=\dfrac{a^2+4b^2}{36}$

の原点または $xy<0$

を満たす部分である．

これを図示すると，次のようになる。



11-31 (j38-2)

点 A(1，7) から出た光線が，y 軸に反射し，さらに，直線 $y=2x$ に点 P で反射して，点 A に戻った．点 P の座標を求めよ．

y 軸に関して A と対称な点を B，直線 $y=2x$ に関して A と対称な点を C とすると，

$$\mathrm{B}(-1,\ 7).$$

また，$\mathrm{C}(a,\ b)$ とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{b+7}{2}=2\left(\dfrac{a+1}{2}\right), \\ \dfrac{b-7}{a-1}\cdot 2=-1 \end{cases}$$

であるから，

$$a=5,\quad b=5.$$

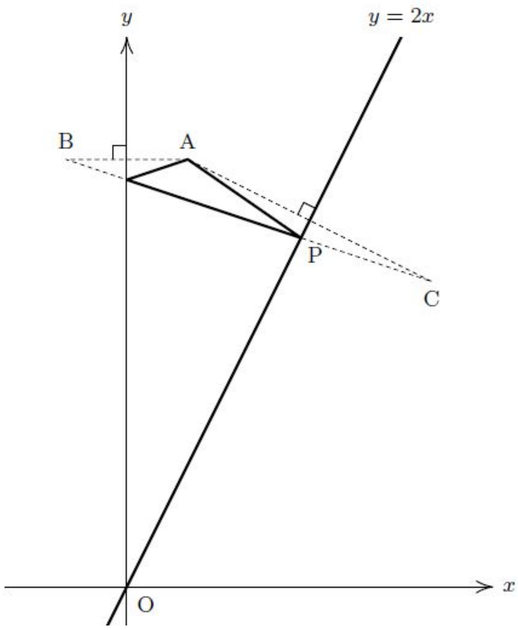
点 P が直線 $y=2x$ と直線 BC の交点のとき，条件が成り立つ．

直線 BC の方程式は，

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{20}{3}$$

であるから，

$$\mathrm{P}\left(\frac{20}{7},\ \frac{40}{7}\right).$$

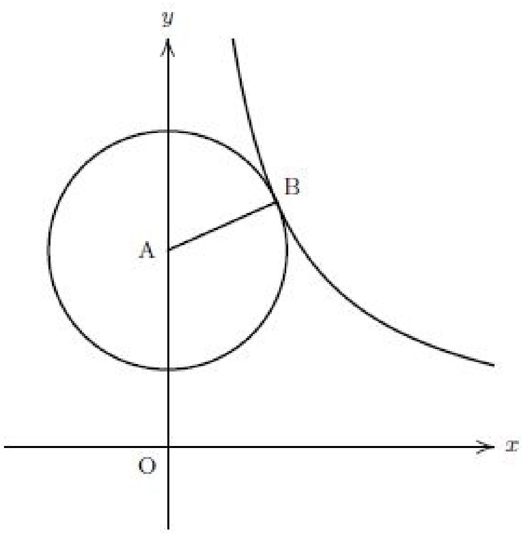


11-32 (j38-3)

点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする円と，曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ は 1 点 $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ のみを共有する．

(1)　a を b を用いて表せ．

(2)　点 A が y 軸上を動くとき，線分 AB の中点 M の軌跡を求めよ．



(1)　点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする円が曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ と 1 点のみ共有するのは点 B において，円と曲線が共通接線をもつときである．

ここで，$y=\dfrac{1}{x}$ より，

$$y'=-\frac{1}{x^2}$$

であるから，点 B における曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の接線の傾きは，

$$-\frac{1}{b^2}.$$

また，直線 AB の傾きは，

$$\frac{\frac{1}{b}-a}{b}=\frac{1-ab}{b^2}$$

であるから，

$$\frac{1-ab}{b^2}\cdot\left(-\frac{1}{b^2}\right)=-1$$

が成り立つ．

これと，$b>0$ より，

$$a=\frac{1-b^4}{b}.$$

(2) $\mathrm{M}(X,\ Y)$ とすると，

$$\begin{cases} X = \dfrac{b}{2}, \\ Y = \dfrac{a + \dfrac{1}{b}}{2} = \dfrac{ab+1}{2b}. \end{cases}$$

(1) の結果より，

$$Y = \frac{2-b^4}{2b}.$$

また，

$$b = 2X.$$

したがって，

$$Y = \frac{1}{2X} - 4X^3.$$

また，$b > 0$ なので，

$$X > 0.$$

以上より，M の軌跡は，

曲線 $y = \dfrac{1}{2x} - 4x^3$ の $x > 0$ を満たす部分である．

11-33 (j39-1)

不等式 $x^2 + y^2 \leqq 2(|x| + |y|)$ の表す領域を A とする．また，不等式 $|x| + |y| \leqq k$ の表す領域を B とする．ただし，$k > 0$ とする．

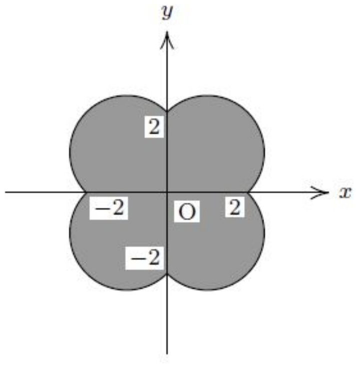
(1) xy 平面で領域 A を図示せよ．また，A の面積を求めよ．

(2) $k = 2$ のとき，領域 B を図示せよ．

(3) $A \subset B$ となる k の最小値を求めよ．

(4) $A \supset B$ となる k の最大値を求めよ．

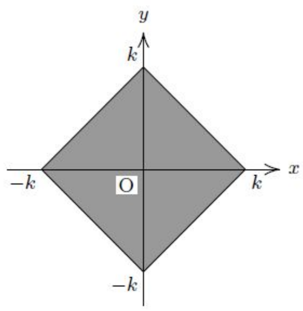
(1) A を図示すると，次のようになる．



A の面積は，

$$4\left\{\pi(\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right\} = 8\pi + 8.$$

(2) B を図示すると，次のようになる．



(3) $A \subset B$ となる k の最小値は，直線 $x + y = k$ が点 $(2,\ 2)$ を通るときの k であるから，

$$k = 4.$$

(4) $A \supset B$ となる k の最大値は，直線 $x + y = k$ が点 $(2,\ 0)$ を通るときの k であるから，

$$k = 2.$$

11-34 (s39-2)

a を正の実数とする．点 $(x,\ y)$ が，不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ の定める領域を動くとき，つねに $\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2+y \leqq 2$ となる．a の値の範囲を求めよ．

$x^2 \leqq y \leqq x$ より，

$$x^2 \leqq x$$

であるから，

$$0 \leqq x \leqq 1.$$

また，

$$(x-a)^2+x^2 \leqq (x-a)^2+y \leqq (x-a)^2+x$$

であるから，つねに

$$\frac{1}{2} \leqq (x-a)^2+y \leqq 1$$

が成り立つ条件は，$0 \leqq x \leqq 1$ において，次の①，②が成り立つことである．

$$(x-a)^2+x^2 \geqq \frac{1}{2}, \qquad \cdots ①$$

$$(x-a)^2+x \leqq 2. \qquad \cdots ②$$

ここで，

$$\begin{cases} f(x)=(x-a)^2+x^2, \\ g(x)=(x-a)^2+x \end{cases}$$

とすると，

$$\begin{cases} f(x)=2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{2}, \\ g(x)=\left(x-a+\dfrac{1}{2}\right)^2+a-\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

a の値で場合分けをする．

(i)　$0<\dfrac{a}{2} \leqq 1$，すなわち，$0<a \leqq 2$ のとき，①が成り立つ条件は，

$$f\left(\frac{a}{2}\right) \geqq \frac{1}{2}$$

より，

$$1 \leqq a \leqq 2.$$

(ii)　$\dfrac{a}{2}>1$，すなわち，$a>2$ のとき，①が成り立つ条件は，

$$f(1) \geqq \frac{1}{2}$$

なので，

$$a>2.$$

(i)，(ii) より，

$$a \geqq 1. \qquad \cdots ③$$

(ア)　$a-\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{2}$，すなわち，$0<a \leqq 1$ のとき，②が成り立つ条件は，

$$g(1) \leqq 2$$

より，

$$0<a \leqq 1.$$

(イ)　$a-\dfrac{1}{2} \geqq \dfrac{1}{2}$，すなわち，$a \geqq 1$ のとき，②が成り立つ条件は，

$$g(0) \leqq 2$$

より，

$$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}.$$

(ア)，(イ) より，

$$0<a \leqq \sqrt{2}. \qquad \cdots ④$$

③，④より，求める a の値の範囲は，

$$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}.$$

11-35 (s39-4)

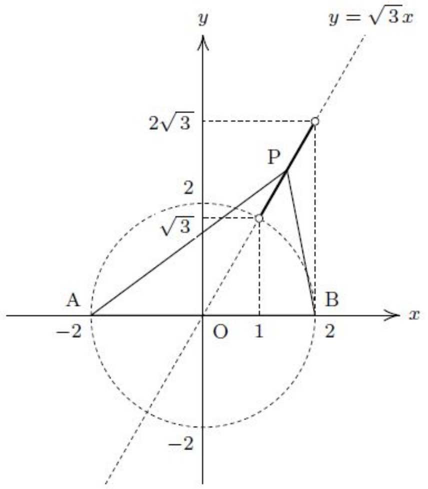
$t>0$ を実数とする．座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える．

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ．

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ．

(3)　辺 AB，BP，PA の中点をそれぞれ M，Q，R とおく．t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ，QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

(1) 点 $P(t,\ \sqrt{3}t)$ は直線 $y=\sqrt{3}x$ 上の点であるから，三角形 ABP が鋭角三角形となるのは $t>0$ なので，点 P が次の図の実線部分上にあるときである．ただし，図の円は線分 AB を直径とする円である．



したがって，求める t の範囲は，

$$1<t<2.$$

(2) 三角形の垂心は頂点から対辺に引いた 3 本の垂線の交点である．

ここで，P から辺 AB に引いた垂線は直線 $x=t$ である．

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}t)$$

であるから，直線 AP の方程式は，

$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}ty=0.$$

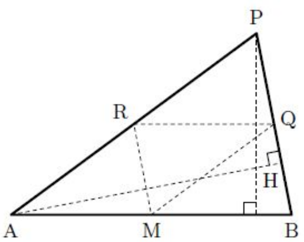
これに $x=t$ を代入すると，

$$y=\frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}.$$

以上より，三角形 ABP の垂心 H の座標は，

$$\mathrm{H}\left(t,\ \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right).$$

(3) 3 点 M，Q，R を図示すると，次の図のようになる．



四面体を作るとき，3 点 A，B，P が重なる点を C とする．すなわち，題意の四面体の 4 頂点は M，Q，R，C である．

ここで，3 点 M，Q，R は各辺の中点であるから，中点連結定理より，

$$\begin{cases} \mathrm{RQ}\,/\!/\,\mathrm{AB}, \\ \mathrm{MR}\,/\!/\,\mathrm{BP}, \\ \mathrm{QM}\,/\!/\,\mathrm{PA}. \end{cases} \quad \cdots ①$$

さらに，点 H は三角形 ABP の垂心であるから，

$$\begin{cases} \mathrm{PH}\perp\mathrm{AB}, \\ \mathrm{AH}\perp\mathrm{BP}, \\ \mathrm{BH}\perp\mathrm{PA}. \end{cases} \quad \cdots ②$$

点 C について考える，すなわち，空間で考えると①，②より，

$$\begin{cases} \mathrm{CH}\perp\mathrm{RQ}, \\ \mathrm{CH}\perp\mathrm{MR}, \\ \mathrm{CH}\perp\mathrm{QM} \end{cases}$$

が成り立つので，点 C から三角形 MQR を含む平面に下ろした垂線の足が点 H と一致する．

これと (2) の結果より，

$$\mathrm{C}\left(t,\ \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t},\ h(t)\right)\quad (h(t)>0)$$

とおける．

このとき，CM = 2 であり，M(0, 0, 0) であることから，

$$t^2+\left(\frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2+\{h(t)\}^2=4.$$

これと $h(t)>0$ より，

$$h(t)=\frac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}.$$

したがって，四面体 CMQR の体積を $V(t)$ とすると，

$$\begin{aligned} V(t)&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{MQR}\cdot h(t) \\ &=\frac{1}{12}\triangle\mathrm{ABP}\cdot h(t) \\ &=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}t\cdot\frac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t} \\ &=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}. \end{aligned}$$

これより，$V(t)$ は $t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ のとき，

$$\text{最大値}\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}$$

をとる．

11-36 (j42-4)

O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $x\geqq 1$ を満たす部分を l とする．

(1) l 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線 m の方程式を求めよ．

(2) 点 A が l 全体を動くとき，m が通過する範囲を求め，図示せよ．

y 軸に関して A と対称な点を B，直線 $y=2x$ に関して A と対称な点を C とすると，

$$\mathrm{B}(-1,\ 7).$$

また，$\mathrm{C}(a,\ b)$ とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{b+7}{2}=2\left(\dfrac{a+1}{2}\right), \\ \dfrac{b-7}{a-1}\cdot 2=-1 \end{cases}$$

であるから，

$$a=5,\quad b=5.$$

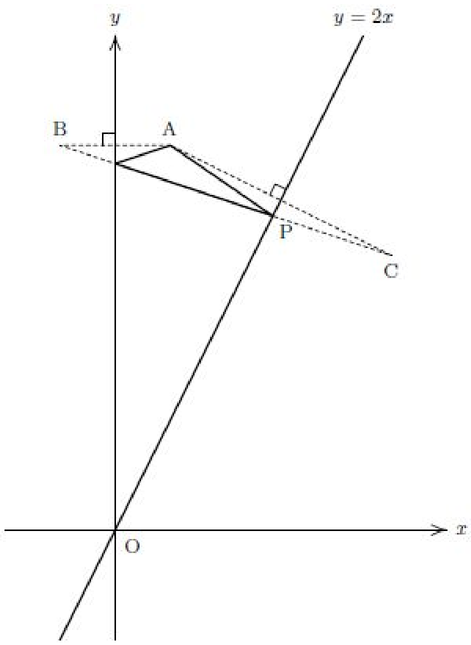
点 P が直線 $y=2x$ と直線 BC の交点のとき，条件が成り立つ．

直線 BC の方程式は，

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{20}{3}$$

であるから，

$$\mathrm{P}\left(\frac{20}{7},\ \frac{40}{7}\right).$$



11-37 (s42-4)

xy 平面上に放物線 $C:y=x^2$ がある．C 上の 2 点 P，Q が $\mathrm{PQ}=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点の軌跡を D とする．

(1)　D の方程式を求めよ．

(2)　C，D，y 軸および直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1)　2 点 P，Q は C 上の点であるから，

$$\mathrm{P}(p,\ p^2),\ \mathrm{Q}(q,\ q^2)$$

とおける．

このとき，$\mathrm{PQ}=2$ より，

$$(p-q)^2+(p^2-q^2)^2=4$$

であるから，

$$(p-q)^2\{1+(p+q)^2\}=4$$

$$\{(p+q)^2-4pq\}\{1+(p+q)^2\}=4. \qquad \cdots ①$$

ここで，線分 PQ の中点を $\mathrm{M}(x,\ y)$ とすると，

$$\begin{cases} x=\dfrac{p+q}{2}, \\ y=\dfrac{p^2+q^2}{2} \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} p+q=2x, \\ pq=2x^2-y. \end{cases} \qquad \cdots ②$$

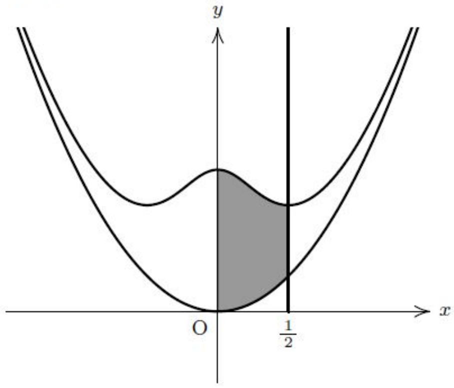
①，②より，

$$\{4x^2-4(2x^2-y)\}(1+4x^2)=4$$

であるから，D の方程式は，

$$y=x^2+\frac{1}{1+4x^2}.$$

(2)　C，D，y 軸および直線 $x=\dfrac{1}{2}$ で囲まれた図形を図示すると，次の図の網目部分である．



したがって，求める面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+4x^2}\,dx.$$

ここで，

$$x=\frac{1}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とすると，

$$dx=\frac{1}{2\cos^2\theta}\,d\theta$$

であるから，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\left[\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{8}.$$

11-38 (j43-1)

半円 $x^2+y^2=1$，$y \geqq 0$ がある．この円周上に相異なる 2 点 P，Q をとり，弦 PQ に沿って折り返したとき，円弧 PQ が点 $\mathrm{R}(r,\ 0)$ $(-1 \leqq r \leqq 1)$ で x 軸と接するようにする．

(1)　折り返した円弧が円周の一部となる円の方程式を求めよ．

(2)　直線 PQ の方程式を求めよ．

(3)　弦 PQ の長さを r を用いて表せ．

(4)　このような弦 PQ が存在する範囲を求め，図示せよ．

(1)　求める円は点 R で x 軸に上方から接する半径 1 の円であるから，

中心 $(r,\ 1)$，　半径 1 の円．

したがって，求める円の方程式は，

$$(x-r)^2+(y-1)^2=1.$$

(2)　(1) の結果と $x^2+y^2=1$ を連立してできる方程式

$$2rx+2y=r^2+1$$

が直線 PQ の方程式．

(3)　$x^2+y^2=1$ の中心 $(0,\ 0)$ と直線 PQ との距離を d とすると，

$$d=\frac{|r^2+1|}{\sqrt{4(r^2+1)}}=\frac{1}{2}\sqrt{r^2+1}.$$

また，三平方の定理より，

$$\mathrm{PQ}=2\sqrt{1-d^2}$$

であるから，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{3-r^2}.$$

(4)　弦 PQ は円 $x^2+y^2=1$ の周および内部に含まれる．

また，(2) より，直線 PQ は，

$$y=-rx+\frac{1}{2}(r^2+1)$$

であるから，

$$f(r)=\frac{1}{2}r^2-xr+\frac{1}{2}$$

とすると，

$$f(r)=\frac{1}{2}(r-x)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2$$

であるから，$-1\leqq x\leqq 1$ であることに注意して，放物線 $s=f(r)$ の軸 $r=x$ と区間 $-1\leqq r\leqq 1$ の位置で場合分けをして $f(r)$，すなわち，y のとり得る値の範囲を調べる．

(i)　$-1\leqq x\leqq 0$ のとき，

$$f(x)\leqq f(r)\leqq f(1)$$

であるから，

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\leqq y\leqq -x+1.$$

(ii)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，

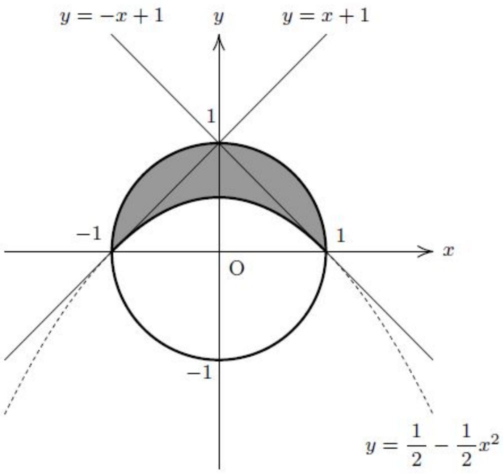
$$f(x)\leqq f(r)\leqq f(-1)$$

であるから，

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\leqq y\leqq x+1.$$

以上より，弦 PQ が存在する範囲は次のようになる．

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqq 1 \\ \text{かつ} \\ -1\leqq x\leqq 0\text{のとき，}\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\leqq y\leqq -x+1, \\ 0\leqq x\leqq 1\text{のとき，}\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\leqq y\leqq x+1. \end{cases}$$



11-29 (s43-2)

k を実数とするとき，2 つの直線

$$l\ :\ (k+1)x+(1-k)y+k-1=0$$

$$m\ :\ kx+y+1=0$$

について，次の問に答えよ．

(1)　k の値によらず l はある定点を通ることを示せ．

(2)　l と m のなす角のうち鋭角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3)　k がすべての実数をとるとき，l と m の交点の軌跡を求めよ．

(1)　l の方程式を k で整理すると，

$$k(x-y+1)+x+y-1=0$$

であるから，

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ x+y-1=0. \end{cases}$$

これより，

$$(x,\ y)=(0,\ 1).$$

したがって，l は定点 $(0,\ 1)$ を通る．

(2)　l，m の法線ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ とすると，

$$\overrightarrow{n_1}=(k+1,\ 1-k),\quad \overrightarrow{n_2}=(k,\ 1)$$

であるから，$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ のなす角を α とすると，

$$\cos\alpha=\frac{k(k+1)+(1-k)\cdot 1}{\sqrt{(k+1)^2+(1-k)^2}\sqrt{k^2+1^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

これより，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ なので，

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

(3)　m の方程式より，

$$kx=-y-1. \qquad \cdots(*)$$

(ｉ)　$x=0$ のとき，$(*)$ より，

$$y=-1.$$

これと (1) より，点 $(0,\ 1)$ は l と m の交点に成り得ない．

逆に，$(x,\ y)=(0,\ -1)$ のとき，l の方程式より，

$$k=1$$

なので，l も点 $(0,\ -1)$ を通る．

(ii)　$x\neq 0$ のとき，$(*)$ より，

$$k=-\frac{y+1}{x}.$$

これを l の方程式を代入すると，

$$\left(-\frac{y+1}{x}+1\right)x+\left(1+\frac{y+1}{x}\right)y-\frac{y+1}{x}-1=0$$

であるから，整理すると，

$$(x-1)^2+y^2=2.$$

以上より，l と m の交点の軌跡は，

円 $(x-1)^2+y^2=2$ の点 $(0,\ 1)$ を除く部分．

11-39 (j14-2)

直線 AB の傾きは，

$$-\frac{4}{3}$$

であるから，直線 AB の方程式は，

$$y=-\frac{4}{3}x-8.$$

また，直線 AC の傾きは，

$$\frac{4}{3}$$

であるから，直線 AC の方程式は，

$$y=\frac{4}{3}(x+6)$$

$$=\frac{4}{3}x+8.$$

また，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\{8-(-8)\}\{15-(-6)\}$$

$$=168.$$

さらに，三平方の定理より，

$$\mathrm{AB}=10,\qquad \mathrm{BC}=39,\qquad \mathrm{CA}=35$$

であるから，三角形 ABC の内接円の半径を r とし，三角形 ABC の面積について考えると，

$$\frac{1}{2}(10+39+35)r=168 \iff r=4.$$

ここで，x 軸が $\angle$BAC の二等分線であるから，内接円の中心は x 軸上にある。

これと A の座標が $(-6,\ 0)$ であり，直線 AC の傾きが $\dfrac{4}{3}$ であることから，内接円の中心の座標は，

$$(-1,\ 0).$$

$\angle$ABC の二等分線はこの点を通るので，点 B も通ることより，傾きを調べると，

$$-8$$

なので，その方程式は，

$$y=-8x-8.$$

(部分的別解)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(6,\ -8)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(21,\ 28)$ であるから，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|6\times 28-(-8)\times 21|$$

$$=168.$$

(部分的別解終り)