試験時間45分

$\boxed{1}$ p，q を定数とする。定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+px-q)^2dx$ は，$p=$ ア $\boxed{}$，$q=$ イ $\boxed{}$ で最小値をとる。空欄を埋めよ。ただし，空欄に入る数は1桁の整数とは限らない。

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-1}^{3}(|x|-1)^2dx$ を求めよ。

$\boxed{3}$ xy 平面上で，連立不等式

$$\begin{cases} |x| \leqq 2, \\ y \geqq x, \\ y \leqq \left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2 \end{cases}$$

を満たす領域の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 C の値を求めよ。

$$\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^1 (x+t)^2 f'(t)\,dt=x^2+C$$

$\boxed{5}$ $f(x)=x^4+2x^3-2x^2$ として，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ の増減と極値を調べ，グラフをかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ に2点で接する直線の方程式を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と(2)で求めた直線 $y=g(x)$ とで囲まれる部分の面積を S とする。

S の値を求めよ。必要に応じて $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$ を使ってよい。

$\boxed{1}$ 解答　(ア)　0　　(イ)　$\dfrac{1}{3}$

$\boxed{2}$ 解答　$\dfrac{10}{3}$

$\boxed{3}$ 解答　$\dfrac{64}{27}$

$\boxed{4}$ 解答　$f(x)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$，$C=\dfrac{2}{9}$

$\boxed{5}$ 解答　(1)　$x=-2$ のとき極小値 -8,

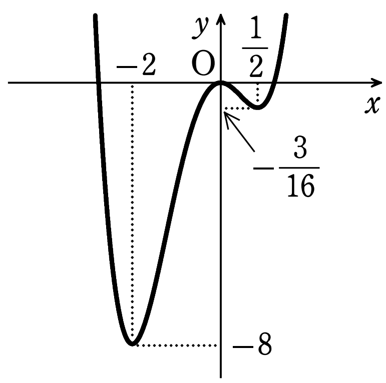
$x=0$ のとき極大値 0,

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき極小値 $-\dfrac{3}{16}$

〔極値の情報はグラフに書いてあればOK〕

(2)　$y=3x-\dfrac{9}{4}$

(3)　$\dfrac{49\sqrt{7}}{30}$



$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2+px-q)^2dx=\int_{-1}^{1}\{x^4+2px^3+(p^2-2q)x^2-2pqx+q^2\}dx$

$$=2\int_0^1\{x^4+(p^2-2q)x^2+q^2\}dx=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{1}{3}(p^2-2q)x^3+q^2x\right]_0^1$$

$$=2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}(p^2-2q)+q^2\right\}=\frac{2}{3}p^2+2q^2-\frac{4}{3}q+\frac{2}{5}$$

$$=\frac{2}{3}p^2+2\left(q-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{45}$$

よって，この定積分は $p={}^{ア}0$，$q={}^{イ}\dfrac{1}{3}$ で最小値をとる。

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-1}^{3}(|x|-1)^2dx=\int_{-1}^{3}(x^2-2|x|+1)dx$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+\int_0^3(x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^3$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}+1-1\right)+(9-9+3)=\frac{10}{3}$$

$\boxed{3}$ $|x|\leqq 2$ から　　$-2\leqq x\leqq 2$ ……①

$y\leqq\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ から　　$y\leqq\dfrac{3}{4}|x^2-4|-2$ ……②

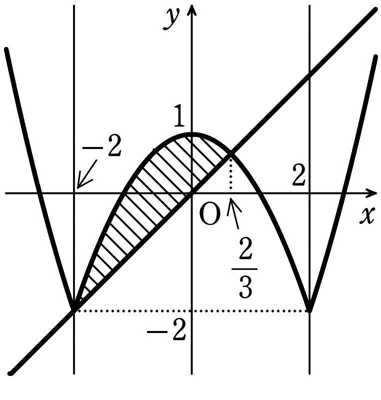
① のとき，② は　　$y\leqq-\dfrac{3}{4}(x^2-4)-2$

また，$x=-\dfrac{3}{4}(x^2-4)-2$ を解くと　　$3x^2+4x-4=0$

$(x+2)(3x-2)=0$

$x=-2,\ \dfrac{2}{3}$

したがって，連立不等式が表す領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



求める面積は

$$\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left\{-\frac{3}{4}(x^2-4)-2-x\right\}dx=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2-x+1\right)dx$$

$$=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{\frac{2}{3}}(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)dx=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}\left\{\frac{2}{3}-(-2)\right\}^3=\frac{1}{8}\left(\frac{8}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int_0^1 (x+t)^2 f'(t)\,dt=\int_0^1 (x^2+2xt+t^2)f'(t)\,dt$

$$=x^2\int_0^1 f'(t)\,dt+2x\int_0^1 tf'(t)\,dt+\int_0^1 t^2 f'(t)\,dt$$

$\displaystyle\int_0^1 f'(t)dt=k$，$\displaystyle\int_0^1 tf'(t)dt=l$，$\displaystyle\int_0^1 t^2f'(t)dt=m$ とおくと，k，l，m は定数であり，

与えられた等式から　　$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt+kx^2+2lx+m=x^2+C$　……①

① の両辺を x で微分すると　　$f(x)+2kx+2l=2x$

すなわち　　$f(x)=2(1-k)x-2l$　……②

よって　　$f'(x)=2(1-k)$,

$$\int_0^1 f'(t)\,dt=\int_0^1 2(1-k)dt=\Big[2(1-k)t\Big]_0^1=2(1-k),$$

$$\int_0^1 tf'(t)\,dt=\int_0^1 2(1-k)tdt=\Big[(1-k)t^2\Big]_0^1=1-k,$$

$$\int_0^1 t^2f'(t)\,dt=\int_0^1 2(1-k)t^2dt=\left[\frac{2}{3}(1-k)t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}(1-k)$$

ゆえに　　$2(1-k)=k$，$1-k=l$，$\dfrac{2}{3}(1-k)=m$

これを解くと　　$k=\dfrac{2}{3}$，$l=\dfrac{1}{3}$，$m=\dfrac{2}{9}$

したがって，② から　　$f(x)=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$

また，① に $x=0$ を代入すると　　$m=C$　　　$m=\dfrac{2}{9}$ であるから　　$C=\dfrac{2}{9}$

$\boxed{5}$ (1)　$f'(x)=4x^3+6x^2-4x=2x(x+2)(2x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-2$，0，$\dfrac{1}{2}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{16}$	$\nearrow$

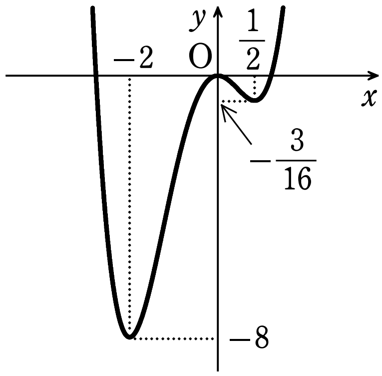
よって，$y=f(x)$ は

$x=-2$ のとき極小値 -8,

$x=0$　のとき極大値 0,

$x=\frac{1}{2}$　のとき極小値 $-\frac{3}{16}$

をとる。また，グラフは右の図のようになる。



(2)　$f(x)-g(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2$ から

$$x^4+2x^3-2x^2-ax-b$$
$$=x^4-2(x_1+x_2)x^3+(x_1{}^2+4x_1x_2+x_2{}^2)x^2-2x_1x_2(x_1+x_2)x+(x_1x_2)^2$$

両辺の係数を比較して

$-2(x_1+x_2)=2$　……①,　$x_1{}^2+4x_1x_2+x_2{}^2=-2$　……②

$-2x_1x_2(x_1+x_2)=-a$　……③,　$(x_1x_2)^2=-b$　……④

① から　$x_1+x_2=-1$　……⑤

② から　$(x_1+x_2)^2+2x_1x_2=-2$

⑤ を代入して　$(-1)^2+2x_1x_2=-2$　よって　$x_1x_2=-\frac{3}{2}$　……⑥

⑤，⑥ を ③，④ に代入して　$a=3$，$b=-\frac{9}{4}$

したがって，求める直線の方程式は　$y=3x-\frac{9}{4}$

(3)　⑤，⑥ から，x_1，x_2 は 2 次方程式 $t^2+t-\frac{3}{2}=0$ の解である。

これを解くと　$t=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$　$x_1<x_2$ から　$x_1=\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$

区間 $x_1\leqq x\leqq x_2$ で $f(x)\geqq g(x)$ であるから

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)^2(x-x_2)^2dx$$
$$=\frac{1}{30}(x_2-x_1)^5=\frac{1}{30}(\sqrt{7})^5=\frac{49\sqrt{7}}{30}$$