談話室マロニエ

SoyPaste

演習期の数学

1 二次関数

2 数学Ⅲの関数・極限

3 数と式，整数問題（数学ⅠAⅡ）

4 極限（数学Ⅲ）中心

5 数列・漸化式

6 数学Ⅲの微分法

7 複素平面

8 指数対数

8-1 (r30-1)

次の問に答えよ．

(1)　84^{12} の桁数を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$，$\log_{10}7=0.845$ とする．

(2)　$\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{20}\right)\right\}^{20}$ は，小数第(　　)桁に初めて0でない数字が現れる．必要ならば，$\log_{10}2=0.3010$ を用いよ．

(1)　$84^{12}=10^x$ とすると，

$$\begin{aligned} x &= \log_{10}84^{12} \\ &= 12\log_{10}2^2\times3\times7 \\ &= 12(2\log_{10}2+\log_{10}3+\log_{10}7) \\ &= 12(2\times0.301+0.477+0.845) \\ &= 23.088 \end{aligned}$$

であるから，84^{12} の桁数は，

$$24.$$

(2)　$\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{20}\right)=\dfrac{1}{20}$

であるから，

$$\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{20}\right)\right\}^{20}$$
$$=10\left(\frac{1}{20}\right)^{21}.$$

ここで，

$$10\left(\frac{1}{20}\right)^{21}=10^x$$

とすると，

$$\begin{aligned} x &= \log_{10}10\left(\frac{1}{20}\right)^{21} \\ &= \log_{10}10^{-20}\times2^{-21} \\ &= -20-21\log_{10}2 \\ &= -20-21\times0.301 \\ &= -26.321 \end{aligned}$$

であるから，小数第27位に初めて0でない数字が現れる．

8-2 (r42-1)

次の不等式を解け．

(1)　$\log_2(x-1)-\log_4(x+1)\leqq1$

(2)　$\log_2|x-1|+\log_{\frac{1}{4}}|4-x|<2$

(1) $$\log_2(x-1)-\log_4(x+1)\leqq 1 \qquad \cdots ①$$

において，真数が正であることから，

$$x-1>0 \text{ かつ } x+1>0,$$

すなわち，

$$x>1. \qquad \cdots ②$$

このとき，①は，

$$\log_2(x-1)-\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4}\leqq 1$$

$$2\log_2(x-1)\leqq \log_2 4+\log_2(x+1)$$

$$\log_2(x-1)^2\leqq \log_2 4(x+1)$$

であるから，

$$(x-1)^2\leqq 4(x+1)$$

$$x^2-6x-3\leqq 0$$

$$3-2\sqrt{3}\leqq x\leqq 3+2\sqrt{3}. \qquad \cdots ③$$

②，③より，①の解は，

$$1<x\leqq 3+2\sqrt{3}.$$

(2) $$\log_2|x-1|+\log_{\frac{1}{4}}|4-x|<2 \qquad \cdots ①$$

において，真数が正であることから，

$$|x-1|>0 \text{ かつ } |4-x|>0,$$

すなわち，

$$x\neq 1 \text{ または } x\neq 4. \qquad \cdots ②$$

(1) $$\log_2(x-1)-\log_4(x+1)\leqq 1 \qquad \cdots ①$$

において，真数が正であることから，

$$x-1>0 \text{ かつ } x+1>0,$$

すなわち，

$$x>1. \qquad \cdots ②$$

このとき，①は，

$$\log_2(x-1)-\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4}\leqq 1$$

$$2\log_2(x-1)\leqq \log_2 4+\log_2(x+1)$$

$$\log_2(x-1)^2\leqq \log_2 4(x+1)$$

であるから，

$$(x-1)^2\leqq 4(x+1)$$

$$x^2-6x-3\leqq 0$$

$$3-2\sqrt{3}\leqq x\leqq 3+2\sqrt{3}. \qquad \cdots ③$$

②，③より，①の解は，

$$1<x\leqq 3+2\sqrt{3}.$$

(2) $$\log_2|x-1|+\log_{\frac{1}{4}}|4-x|<2 \qquad \cdots ①$$

において，真数が正であることから，

$$|x-1|>0 \text{ かつ } |4-x|>0,$$

すなわち，

$$x\neq 1 \text{ または } x\neq 4. \qquad \cdots ②$$

8-3 (j42-2)

a を実数とする．x に関する方程式 $\log_3(x-1)=\log_9(4x-a-3)$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めよ．

$$\log_3(x-1)=\log_9(4x-a-3) \qquad \cdots ①$$

において，真数が正であることから，

$$x-1>0 \text{ かつ } 4x-a-3>0$$

すなわち，

$$x>1 \text{ かつ } x>\frac{a+3}{4}. \qquad \cdots ②$$

このとき，①は，

$$2\log_3(x-1)=\log_3(4x-a-3)$$

$$\log_3(x-1)^2=\log_3(4x-a-3)$$

であるから，

$$(x-1)^2=4x-a-3$$

$$a=-x^2+6x-4.$$

ここで，

$$f(x)=-x^2+6x-4$$

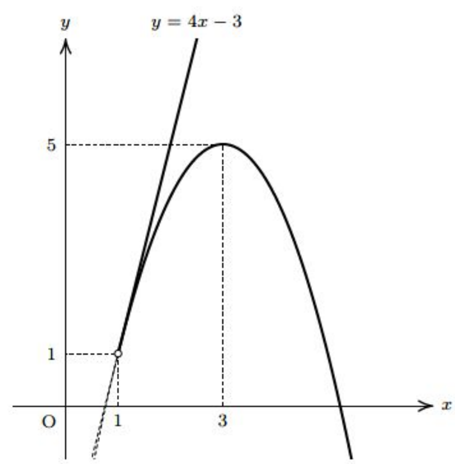
とすると，

$$f(x)=-(x-3)^2+5.$$

また，$y=a$ のとき，②より，

$$x>\frac{y+3}{4}\iff y<4x-3.$$

さらに，直線 $y=4x-3$ は放物線 $y=f(x)$ の点 (1，1) における接線である．



したがって，直線 $y=a$ を $a>1$ の範囲で動かすとき，②はつねに満たされる．

以上より，①が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，

$$1<a<5.$$

8-4 (j1-4)

定数 k に対して，方程式

$$(\log_2 x)^2-(k+2)\log_2 x-k+17=0 \qquad \cdots (*)$$

を考える．

(1) 方程式 $(*)$ が実数解 α，β をもつとき，$\log_2 \alpha\beta$ と $(\log_2 \alpha)(\log_2 \beta)$ を k を用いて表せ．

(2) 方程式 $(*)$ のすべての解が 4 より大きくなるような定数 k の値の範囲を求めよ．

(1) 解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \log_2 \alpha+\log_2 \beta=k+2, \\ (\log_2 \alpha)(\log_2 \beta)=-k+17 \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} \log_2 \alpha\beta=k+2, \\ (\log_2 \alpha)(\log_2 \beta)=-k+17. \end{cases}$$

(2) $(*)$ のすべての解が 4 より大きくなる条件は，

$$\begin{cases} (k+2)^2-4(-k+17)\geqq 0, \\ \log_2 \alpha+\log_2 \beta>4, \\ (\log_2 \alpha-2)(\log_2 \beta-2)>0 \end{cases}$$

であるから，(2) の結果を用いると，

$$\begin{cases} k^2+8k-64\geqq 0, \\ k+2>4, \\ -k+17-2(k+2)+4>0. \end{cases}$$

したがって，求める k の値の範囲は，

$$-4+4\sqrt{5}\leqq k<\frac{17}{3}.$$

8-5 (j6-1)

0 でない実数 x，y，z，w と正の整数 a，b，c，d が，

$$a^x=b^y=c^z=d^w, \quad \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{w}$$

を満たすものとする．ただし，$a>b>c>1$，$d>1$ とする．

(1) a，b，c を用いて d を表せ．

(2) $d\leqq 1000$ かつ $\sqrt{d}$ が整数であるような d を 1 つ求めよ．

(1) 条件

$$a^x=b^y=c^z=d^w$$

において，x，y，z が 0 でない実数なので，

$$\begin{cases} a=d^{\frac{w}{x}}, \\ b=d^{\frac{w}{y}}, \\ c=d^{\frac{w}{z}} \end{cases}$$

であるから，

$$ab^2c^3=d^{\frac{w}{x}}\cdot d^{\frac{2w}{y}}\cdot d^{\frac{3w}{z}} =\left(d^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}}\right)^w.$$

これと，

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{1}{w}$$

より，

$$ab^2c^3=d.$$

(2)　(1) の結果と $a > b > c > 1$ より，

$$c^6 < d < a^6$$

であるから，$d \leqq 1000 = 10^3$ より，

$$c = 2.$$

このとき，(1) の結果より，

$$8ab^2 = d$$

であるから，$d \leqq 1000$ より，

$$ab^2 \leqq 125.$$

さらに，

$$b^3 < ab^2 < a^3$$

であるから，

$$b = 3.$$

したがって，

$$d = 3^2 \cdot 2^3 a$$

なので，

$$\sqrt{d} = 6\sqrt{2a}.$$

これより，$\sqrt{d}$ が整数となる条件は，

$$a = 2^{2n+1}$$

を満たす自然数 n が存在することであり，このとき，

$$\sqrt{d} = 6 \cdot 2^{n+1}$$

であるから，

$$d = 36 \cdot 4^{n+1}.$$

これと $d \leqq 1000$ であることから，

$$4^{n+1} \leqq \frac{1000}{36} = 27 + \frac{7}{9}$$

なので，$a > 3$ より，

$$n = 1.$$

以上より，

$$\begin{aligned} d &= 36 \cdot 4^2 \\ &= 576. \end{aligned}$$

8-6 (s18-2)

次の問に答えよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1)　次の式を満たす整数 k の値を求めよ．

$$10^4 < 2^k < 2 \cdot 10^4$$

(2)　2012 個の 2 の累乗 2^1，2^2，2^3，$\cdots$，2^{2012} のうち，十進法で表したとき，その最高位の数字が 1 であるものの個数を求めよ．

(2004 早稲田大学・改)　(1)$k = 14$，(2)　605個

解説は数ページあとにあります。

8-7 (j30-2)

同じ材質，同じ厚さのガラス板 24 枚を重ねて，光を入射したところ透過光の強さは $\frac{1}{8}$ に減じた．この光の強さを $\frac{1}{2}$ にするためには，何枚のガラス板を重ねればよいか．

ガラス板1枚により透過光がA倍になったとすると，　$A^{24}=\frac{1}{8}$

$A^x=\frac{1}{2}$　となるxを求めることにより求める。（答）8枚

8-8 (j32-1)

$(5^{100})!$ を 10 進法で表すと，末尾に 0 が n 個並ぶ．n は何桁の整数か．

ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

1 から 5^{100} までの整数において，5 の倍数の個数に比べて，2 の倍数の個数の方が多いから，$(5^{100})!$ を 10 進法で表すと，末尾に，

$$\begin{aligned} n &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{5^{100}}{5^k}\right] \\ &= 1+5+5^2+\cdots+5^{99} \\ &= \frac{5^{100}-1}{4} \end{aligned}$$

個並ぶ．

ここで，

$$\begin{aligned} \log_{10}\left(n+\frac{1}{4}\right) &= \log_{10}\frac{5^{100}}{4} \\ &= 100\log_{10}5-2\log_{10}2 \\ &= 100(1-\log_{10}2)-2\log_{10}2 \\ &= 100-102\times0.3010 \\ &= 69.298 \end{aligned}$$

であるから，

$$n=10^{69.298}-\frac{1}{4}.$$

これより，n は，

70 桁の整数．

8-9(s32-4)

$\sum_{n=0}^{100}3^n$ の桁数を求めよ．ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする．

$A=\sum_{n=0}^{100}3^n$ とすると，

$$\begin{aligned} A &= \frac{3^{101}-1}{3-1} \\ &= \frac{1}{2}(3^{101}-1). \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3^{101}-1)>3^{100} &\iff 3^{101}-1>2\cdot3^{100} \\ &\iff 3^{100}>1 \\ \frac{1}{2}(3^{101}-1)<3^{100.5} &\iff 3^{101}-1<2\sqrt{3}\cdot3^{100} \\ &\iff (2\sqrt{3}-3)\cdot3^{100}>1 \end{aligned}$$

であるから，

$$3^{100}<A<3^{100.5}.$$

これより，

$$100\log_{10}3<\log_{10}A<100.5\log_{10}3$$

であるから，

$$100\times0.4771<\log_{10}A<100.5\times0.4771$$

$$47.71<\log_{10}A<47.94855.$$

したがって，$\sum_{n=1}^{100}3^n$ の桁数は，

48．

8-10 (j23-5)

$u=\log_2(6-x)$，$v=\log_2(x-1)$ において，真数が正であることから，

$$1<x<6.$$

また，$u>0$ かつ $v>0$ となるのは，

$$6-x>1 \text{ かつ } x-1>1$$

のときであるから，

$$2<x<5.$$

さらに，

$$\begin{aligned} uv &= \log_2(6-x)(x-1) \\ &= \log_2(-x^2+7x-6). \end{aligned}$$

ここで，

$$-x^2+7x+6=-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$$

であるから，$-x^2+7x-6$ は $x=\dfrac{7}{2}$ で，

$$\text{最大値 } \frac{25}{4}$$

をとる．

さらに，

$$\log_2(6-x)=\log_2(x-1) \iff x=\frac{7}{2}$$

であるから，$x=\dfrac{7}{2}$ のとき，$(*)$ の等号は成り立つ．

したがって，

$$\sqrt{uv} \leqq \frac{1}{2}\log_2\frac{25}{4}$$

であるから，

$$\sqrt{uv} \leqq \log_2 5-1.$$

これより，uv は $x=\dfrac{7}{2}$ のときに最大値

$$(\log_2 5-1)^2$$

をとる．

8-11 (j24-5)

a の定め方より，

$$\begin{aligned} a &= \log_4 x \\ &= \frac{1}{2}\log_2 x. \end{aligned}$$

(1) $2a+b=2$ のとき，

$$\log_2 x + \log_2 y = 2$$

であるから，

$$\log_2 xy = 2 \iff xy = 4. \qquad \cdots ①$$

さらに，真数が正であることから，

$$x > 0,\quad y > 0. \qquad \cdots ②$$

ここで，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$\frac{6}{x} + \frac{3}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{6}{x}\cdot\frac{3}{y}}$$

であるから，

$$\frac{6}{x} + \frac{3}{y} \geqq 6\sqrt{\frac{2}{xy}}. \qquad \cdots ③$$

③の等号は $\dfrac{6}{x} = \dfrac{3}{y}$ かつ①，②のときに成り立つ．

①，③より，

$$\frac{6}{x} + \frac{3}{y} \geqq 3\sqrt{2}$$

であるから，求める最小値は，

$$3\sqrt{2}.$$

(2) 底の変換公式を用いると，

$$\begin{aligned} \log_{x^3y^2}\left(\frac{y^3}{x^2}\right) &= \frac{\log_2 \frac{y^3}{x^2}}{\log_2 x^3y^2} \\ &= \frac{-2\log_2 x + 3\log_2 y}{3\log_2 x + 2\log_2 y} \\ &= \frac{-4a+3b}{6a+3b}. \end{aligned}$$

(3) $x = 2t+3$，$y = 1-t$ のとき，②より，

$$\begin{cases} 2t+3 > 0, \\ 1-t > 0 \end{cases}$$

であるから，

$$-\frac{3}{2} < t < 1. \qquad \cdots ④$$

さらに，$a-b=1$ のとき，

$$\frac{1}{2}\log_2(2t+3) - \log_2(1-t) = 1$$

であるから，

$$\log_2(2t+3) = 2 + 2\log_2(1-t)$$
$$\log_2(2t+3) = \log_2 4(1-t)^2.$$

これより，

$$2t+3 = 4(1-t)^2$$
$$4t^2 - 10t + 1 = 0$$

なので，④より，

$$t = \frac{5-\sqrt{21}}{4}.$$

8-6の解答

(1) $$10^4 < 2^k < 2\cdot 10^4 \quad \cdots ①$$

の辺々の常用対数をとると，

$$\log_{10} 10^4 < \log_{10} 2^k < \log_{10}(2\cdot 10^4)$$

であり，

$$\begin{cases} \log_{10} 10^4 = 4, \\ \log_{10} 2^k = k\log_{10} 2, \\ \log_{10}(2\cdot 10^4) = \log_{10} 2 + \log_{10} 10^4 = \log_{10} 2 + 4 \end{cases}$$

であるから，

$$4 < k\log_{10} 2 < 4 + \log_{10} 2.$$

これを k について解くと，

$$\frac{4}{\log_{10} 2} < k < \frac{4}{\log_{10} 2} + 1.$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ を代入すると，

$$\frac{4}{0.3010} < k < \frac{4}{0.3010} + 1.$$

ここで，

$$\begin{cases} \dfrac{4}{0.3010} = 13.2\cdots \\ \dfrac{4}{0.3010} + 1 = 14.2\cdots \end{cases}$$

であるから，①を満たす整数 k の値は，

$$k = 14.$$

(2) 実数 x の最高位の数字が 1 であるための条件は，

$$10^n \leqq x < 2\cdot 10^n$$

を満たす整数 n が存在することである．

したがって，$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2012$ に対して，2^k の最高位の数字が 1 であるものは，適当な整数 n を用いて，

$$10^n \leqq 2^k < 2\cdot 10^n \quad \cdots ②$$

と表すことができる．

②の辺々の常用対数をとると，

$$\log_{10} 10^n < \log_{10} 2^k < \log_{10}(2\cdot 10^n)$$

であるから，(1) と同様にして，k について解くと，

$$\frac{n}{\log_{10} 2} \leqq k < \frac{n}{\log_{10} 2} + 1 \quad \cdots ③$$

これより，1 つの n に応じて，整数 k が 1 つ定まるから，求める個数は③を満たす整数 n の個数と一致する．

③を n について解くと，

$$(k-1)\log_{10} 2 < n \leqq k\log_{10} 2$$

であるから，$\log_{10} 2 = 0.3010$ を代入すると，

$$0.3010(k-1) < n \leqq 0.3010\times k.$$

$1 \leqq k \leqq 2012$ より，整数 n の範囲は，

$$0.3010(1-1) < n \leqq 0.3010\times 2012,$$

であり，

$$0.3010\times 2012 = 605.612$$

であるから，

$$0 < n \leqq 605.$$

したがって，②を満たす n の値は，

$$n = 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots,\quad 605$$

であるから，求める個数は，

605 個．