17 二次曲線

17-1 (r25-2)

楕円 E : $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=1$ について，次の問に答えよ．

(1) E の 2 つの焦点の座標を求めよ．

(2) E と x 軸との交点の x 座標を求めよ．

(3) 点 (2, 0) を通る E の 2 本の接線を l, m とするとき，l, m の方程式をそれぞれ求めよ．

(4) l, m と E で囲まれた図形の面積を求めよ．

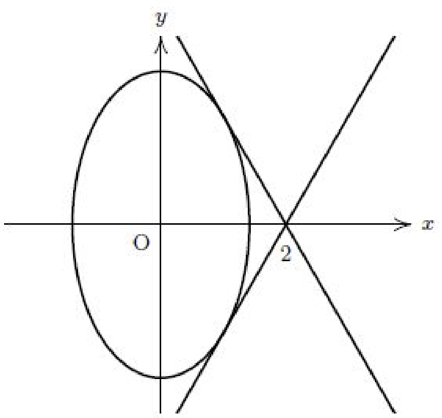
(1) E の 2 つの焦点の座標は，

$$(0,\ 2),\quad (0,\ -2).$$

(2) E と x 軸 $(y=0)$ との交点の x 座標は，

$$x=\pm\sqrt{2}.$$

(3) E と 2 本の接線 l, m を図示すると，次のようになる．



点 (2, 0) を通る直線の方程式を $y=a(x-2)$ とし，

E の方程式を連立すると，

$$\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{6}(x-2)^2=1$$

$$3x^2+a^2(x-2)^2=6$$

$$(a^2+3)x^2-4a^2x+4a^2-6=0. \qquad \cdots (*)$$

$(*)$ の判別式を D とすると，$D=0$ であるから，

$$4a^4-(a^2+3)(4a^2-6)=0$$

$$6a^2-18=0$$

$$6(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$$

$$a=\pm\sqrt{3}.$$

これより，l, m の方程式はそれぞれ，

$$y=\sqrt{3}(x-2),\quad y=-\sqrt{3}(x-2).$$

(4) $a=\pm\sqrt{3}$ のとき，$(*)$ は，

$$6(x-1)^2=0$$

であるから，接点の座標は，

$$(1,\ \sqrt{3}),\quad (1,\ -\sqrt{3}).$$

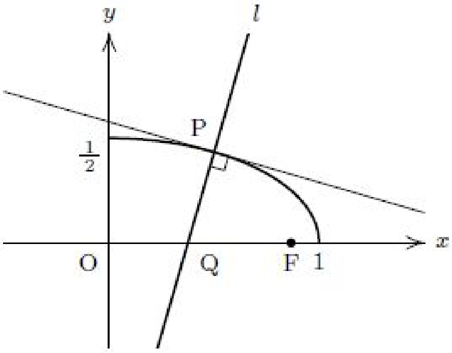
したがって，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1-2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{6-3x^2}\,dx\\&=\sqrt{3}-2\sqrt{3}\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx\\&=\sqrt{3}-2\sqrt{3}\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot 1^2\right\}\\&=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi.\end{aligned}$$

17-2 (r42-2)

楕円 C : $x^2+4y^2=1$ 上の第 1 象限部分の点 P に対して，点 P における C の法線 l と x 軸との交点を Q，楕円 C の 2 つの焦点のうち x 座標が正のものを F とする．

このとき，$\dfrac{\mathrm{QF}}{\mathrm{PF}}$ の値は P のとり方によらず一定であることを示せ．



C : $x^2+4y^2=1$ の焦点の座標は，

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$$

なので，F の定め方より，

$$\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right).$$

$\mathrm{P}(s,\ t)$ $(s>0,\ t>0)$ とすると，P が C 上の点より，

$$s^2+4t^2=1. \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{PF}&=\sqrt{\left(s-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+t^2}\\&=\sqrt{s^2-\sqrt{3}s+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(1-s^2)}\\&=\sqrt{\frac{3}{4}\left(s-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|s-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right|.\end{aligned} \qquad \cdots①$$

また，P における法線の方程式は，

$$4t(x-s)-s(y-t)=0$$

であるから，x 軸との交点の x 座標は，

$$4t(x-s)+st=0$$

を満たす．

$t\neq 0$ より，

$$x=\frac{3}{4}s.$$

したがって，

$$\mathrm{Q}\left(\frac{3}{4}s,\ 0\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{QF}&=\left|\frac{3}{4}s-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\\&=\frac{3}{4}\left|s-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right|.\end{aligned} \qquad \cdots②$$

①，②より，

$$\frac{\mathrm{QF}}{\mathrm{PF}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\text{一定}).$$

17-3 (r43-2)

a は正の実数とする．xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t によって，

$$x=\frac{4at}{1+t^2},\quad y=\frac{4at^2}{1+t^2}$$

と表されているとする．

(1)　t が実数全体を変化するとき，C はどのような図形を描くか．

(2)　$t=2$ における C の接線の方程式を求めよ．

(1) C の定め方より，$t=0$ のとき，

$$(x,\ y)=(0,\ 0).$$

以下では，$t \neq 0$ とする．このとき，

$$x \neq 0,\quad y \neq 0.$$

$$x=\frac{4at}{1+t^2}, \qquad \cdots ①$$

$$y=\frac{4at^2}{1+t^2}. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$t=\frac{y}{x}. \qquad \cdots ③$$

③を①に代入すると，

$$x=\frac{\dfrac{4ay}{x}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}$$

$$x=\frac{4axy}{x^2+y^2}$$

$$x(x^2+y^2-4ay)=0.$$

$x \neq 0$ より，

$$x^2+y^2-4ay=0$$

$$x^2+(y-2a)^2=4a^2.$$

以上より，C は円 $x^2+(y-2a)^2=4a^2$ を描く．

(2) ①，②より，

$$\frac{dx}{dt}=4a\cdot\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=4a\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1-t^2}.$$

したがって，$t=2$ のときの $\dfrac{dy}{dx}$ の値は，

$$-\frac{4}{3}.$$

また，①，②より，$t=2$ のとき，

$$(x,\ y)=\left(\frac{8}{5}a,\ \frac{16}{5}a\right).$$

よって，求める接線の方程式は，

$$y=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{8}{5}a\right)+\frac{16}{5}a$$

$$=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}a.$$

17-4 (j6-3)

円 $x^2+y^2-12x-10y+59=0$ 上の点 $(7,\ 4)$ における接線を l とする．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) l に平行で，$x<0$ において，楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に接する直線の方程式を求めよ．

(1) 円の方程式を変形すると，

$$(x-6)^2+(y-5)^2=2$$

であるから，円の中心の座標は，

$$(6,\ 5).$$

したがって，

$$\vec{n}=(7-6,\ 4-5)$$

$$=(1,\ -1)$$

は l の法線ベクトルであるから，l の方程式は，

$$1\cdot(x-7)+(-1)\cdot(y-4)=0,$$

すなわち，

$$x-y=3.$$

(2) (1) の結果より，l に平行な直線の方程式は，

$$y=x+k$$

とおける．

m の方程式を楕円 E : $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の方程式に代入すると，

$$\frac{x^2}{9}+\frac{1}{4}(x+k)^2=1$$

であるから，

$$4x^2+9(x+k)^2=36$$

$$13x^2+18kx+9k^2-36=0. \qquad \cdots (*)$$

ここで，$x<0$ において，m が楕円 E に接する条件は，

$$\begin{cases} -\dfrac{9}{13}k<0, \\ (9k)^2-13(9k^2-36)=0 \end{cases}$$

であるから，

$$k=\sqrt{13}.$$

したがって，求める直線の方程式は，

$$y=x+\sqrt{13}.$$

17-5 (j13-2)

a，bを正の実数とする．楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる楕円が y 軸と直線 $y=x$ に接するような a，b の値を求めよ．

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる楕円の方程式は，

$$\frac{(x-a)^2}{4}+(y-b)^2=1.$$

これが y 軸と直線 $y=x$ に接する条件は，

$$\frac{a^2}{4}+(y-b)^2=1, \qquad \cdots ①$$

$$\frac{(x-a)^2}{4}+(x-b)^2=1 \qquad \cdots ②$$

がともに重解をもつことである．

①より，

$$(y-b)^2=1-\frac{a^2}{4}$$

であるから，①が重解をもつ条件は，

$$1-\frac{a^2}{4}=0.$$

$a>0$ より，

$$a=2. \qquad \cdots ③$$

③より，②は，

$$(x-2)^2+4(x-b)^2=4$$

$$5x^2-4(2b+1)x+4b^2=0$$

であるから，②が重解をもつ条件は，

$$4(2b+1)^2-20b^2=0$$

$$b^2-4b-1=0.$$

$b>0$ より，

$$b=2+\sqrt{5}.$$

以上より，求める a，b の値は，

$$a=2,\quad b=2+\sqrt{5}.$$

17-6 (j17-3)

xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，

$$\begin{cases} x=\dfrac{4\cos t-2}{5-4\cos t}, \\ y=\dfrac{4\sin t}{5-4\cos t} \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表されている．

(1) $y \geqq 0$ であることを示せ．

(2) $\sin t$ を x，y を用いて表せ．

(3) t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき，点 P はどのような図形を描くか．

(1) $0 \leqq t \leqq \pi$ のとき，

$$\begin{cases} 4\sin t \geqq 0, \\ 5-4\cos t \geqq 0 \end{cases}$$

であるから，

$$y \geqq 0.$$

(2) x の定め方より,

$$x=-1+\frac{3}{5-4\cos t}$$

であるから,

$$5-4\cos t=\frac{3}{x+1}.$$

これを

$$y=\frac{4\sin t}{5-4\cos t}$$

に代入すると,

$$4\sin t=\frac{3y}{x+1}$$

であるから,

$$\sin t=\frac{3y}{4(x+1)}.$$

(3) (2) より,

$$\begin{cases}\sin t=\dfrac{3y}{4(x+1)},\\[2mm] \cos t=\dfrac{5x+2}{4(x+1)}\end{cases}$$

であるから,

$$\left\{\frac{3y}{4(x+1)}\right\}^2+\left\{\frac{5x+2}{4(x+1)}\right\}^2=1.$$

整理すると,

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$$

であるから, P は,

$$\text{円}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$$

の $y\geqq 0$ を満たす部分を描く.

17-7 (j39-2)

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(\sqrt{2},\ 1)$ における接線を l_1, 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ の 2 本の漸近線を l_2, l_3 とする. 3 本の直線 l_1, l_2, l_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ.

l_1, l_2, l_3 の定め方より,

$$\begin{cases}l_1 : \dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{y}{2}=1,\\[2mm] l_2 : y=\dfrac{1}{2}x,\\[2mm] l_3 : y=-\dfrac{1}{2}x\end{cases}$$

であるから, これらの交点の座標は,

$(0,\ 0)$,
$(4(\sqrt{2}-1),\ 2(\sqrt{2}-1))$,
$(4(\sqrt{2}+1),\ -2(\sqrt{2}+1))$.

したがって, 求める面積を S とすると,

$$S=\frac{1}{2}\left|4(\sqrt{2}-1)\{-2(\sqrt{2}+1)\}-2(\sqrt{2}-1)\cdot 4(\sqrt{2}+1)\right|$$
$$=8.$$

17-8 (s43-1)

座標平面上で，極方程式 $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ が表す曲線の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ に対応する部分を C とする．

(1)　曲線 C 上の点 P の直交座標 $(x,\ y)$ を θ の式で表せ．

(2)　曲線 C 上の点 Q の極座標を $(r,\ \theta)$ とする．点 Q における C の接線の傾きが -1 であるとき θ の値を求めよ．

(3)　曲線 C と x 軸によって囲まれる図形の $x \geqq \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ の部分の面積を求めよ．

(1)　P$(x,\ y)$ に対して，

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

であるから，$r = \sqrt{\cos 2\theta}$ のとき，

$$\begin{cases} x = \cos\theta\sqrt{\cos 2\theta}, \\ y = \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}. \end{cases}$$

(2)　(1) の結果より，

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta} + \cos\theta \cdot \frac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}} \\ &= -\frac{\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \\ &= -\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= \cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} + \sin\theta \cdot \frac{-2\sin 2\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}} \\ &= \frac{\cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \\ &= \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= -\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta} \\ &= -\frac{1}{\tan 3\theta}. \end{aligned}$$

したがって，点 Q における C の接線の傾きが -1 である条件は，

$$\tan 3\theta = 1$$

なので，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，

$$3\theta = \frac{\pi}{4}.$$

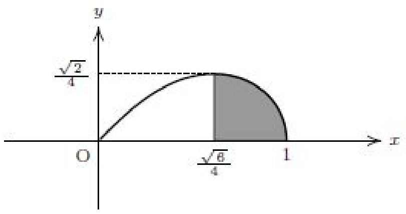
したがって，

$$\theta = \frac{\pi}{12}.$$

(3)　(2) より，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ における点 P$(x,\ y)$ の動きは次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	$-$	$-$	
$\frac{dx}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	↖	$\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$	↙	$(0,\ 0)$

これより，曲線 C と x 軸によって囲まれる図形の $x \geqq \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ の部分は次の図の網目部分である．



求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\sqrt{6}}{4}}^{1} y\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{0} \sin\theta\sqrt{\cos 2\theta} \cdot \left(-\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3\theta\sin\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2\theta - \cos 4\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$