談話室マロニエSoyPaste演習期の数学

1 二次関数

――――

2 二次関数

――――

3 二次関数

――――

4 二次関数

――――

5 二次関数

――――

6 二次関数

――――

7 二次関数

――――

8 二次関数

――――

9 二次関数

――――

10 二次関数

――――

11 二次関数

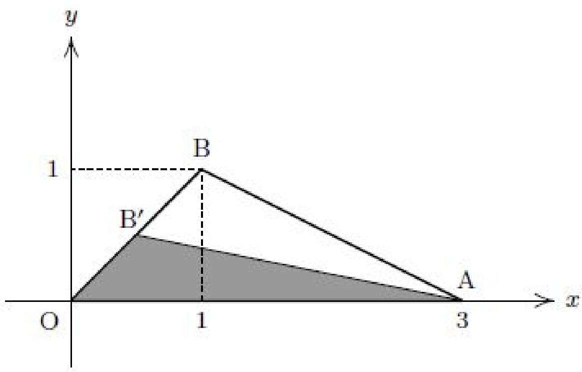
――――

12-1 (r2-2)

xy 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(3,\ 0)$，B$(1,\ 1)$ をとる．実数 s，t が，

$$s \geqq 0, \quad t \geqq 0, \quad s+2t \leqq 1$$

を満たして動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定まる点 P の動く範囲の面積を求めよ．



$t \geqq 0$，$s+2t \leqq 1$ において，$2t = t'$ とすると，

$$t' \geqq 0, \quad s+t' \leqq 1. \qquad \cdots ①$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

であるから，

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$$

とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}. \qquad \cdots ②$$

①，②と $s \geqq 0$ より，P は三角形 OAB′ の周および内部の点．

したがって，求める面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

12-2 (r10-2)

三角形 OAB において，辺 OB の中点を M，辺 OA を $h : (1-h)$ $(0 < h < 1)$ に内分する点を D とし，線分 AM，BD の交点を E とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および h を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 4$，$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}| = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ のとき，h の値を求めよ．

12 枚の札から 3 枚の札を取り出す方法は，

$${}_{12}\mathrm{C}_3 = 220 \text{通り}$$

あり，これらは同様に確からしい．

(1)　3 枚がすべて同じマークになる札の取り出し方は，

4 通り

であるから，求める確率は，

$$\frac{4}{220} = \frac{1}{55}.$$

(2)　3 枚がすべて同じ数字になる札の取り出し方は，

$$3 \times {}_4\mathrm{C}_3 = 12 \text{通り}$$

であるから，求める確率は，

$$\frac{12}{220} = \frac{3}{55}.$$

(3)　3 枚のマークがすべて異なる札の取り出し方は，

$${}_4\mathrm{C}_3 \times 3^3 = 108 \text{通り}$$

であるから，求める確率は，

$$\frac{108}{220} = \frac{27}{55}.$$

(4)　3 枚のマークがすべて異なり，かつ数字もすべて異なる札の取り出し方は，

$${}_4\mathrm{C}_3 \times 3! = 24 \text{通り}$$

であるから，求める確率は，

$$\frac{24}{220} = \frac{6}{55}.$$

12-3 (r34-2)

$\vec{a}=(4,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ -4)$ とする．このとき，$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ が平行になるのは $x=(\quad)$ のときで，垂直になるのは $x=(\quad)$ のときである．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の定め方より，

$$\begin{cases} 3\vec{a}+2\vec{b}=(12+2x,\ 1), \\ 2\vec{a}+\vec{b}=(8+x,\ 2). \end{cases}$$

これより，$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ が平行になる条件は，

$$(12+2x)\cdot 2-1\cdot(8+x)=0$$

$$3x+16=0$$

であるから，

$$x=-\frac{16}{3}.$$

また，$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になる条件は，

$$(12+2x)(8+x)+1\cdot 2=0$$

$$2x^2+28x+98=0$$

$$2(x+7)^2=0$$

であるから，

$$x=-7.$$

12-4 (r35-1)

空間に定点 $\mathrm{A}(0,\ 4,\ 2)$，$\mathrm{B}(2\sqrt{3},\ 2,\ 2)$ と動点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ p)$ がある．$\angle\mathrm{APB}$ の大きさの最大値と，そのときの p の値を求めよ．

A，B，P の定め方より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(0,\ 4,\ 2-p),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(2\sqrt{3},\ 2,\ 2-p)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{APB}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}\\&=\frac{8+(2-p)^2}{\sqrt{16+(2-p)^2}\sqrt{12+4+(2-p)^2}}\\&=\frac{(p-2)^2+8}{(p-2)^2+16}\\&=1-\frac{8}{(p-2)^2+16}.\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{APB}\text{ が最大}&\iff\cos\angle\mathrm{APB}\text{ が最小}\\&\iff(p-2)^2+16\text{ が最小}\end{aligned}$$

が成り立つので，$\angle\mathrm{APB}$ は $p=2$ のとき最大値

$$\frac{\pi}{3}$$

をもつ．

12-5 (r28-1)

座標空間に 4 点 A(1, 0, 1), B(−1, 2, −5), C(−3, 1, −5), D(−3, 0, −3) をとる．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{q}$ とするとき，三角形 ABD の面積は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

に等しいことを示せ．

(2) 点 C は，3 点 A, B, D で定まる平面上にあることを示せ．

(3) 四辺形 ABCD の面積を求めよ．

(1) $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を θ とすると，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABD} &= \frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sin\theta\\ &= \frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1-\cos^2\theta}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2(1-\cos^2\theta)}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}\end{aligned}$$

であるから，示せた．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とすると，

$$(-4,\ 1,\ -6) = \alpha(-2,\ 2,\ -6)+\beta(-4,\ 0,\ -4)$$

であるから，

$$\begin{cases}-2\alpha-4\beta=-4,\\ 2\alpha=1,\\ -6\alpha-4\beta=-6.\end{cases}$$

これを満たす α, β は，

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{3}{4}$$

であるから，C は 3 点 A, B, D で定まる平面上にある．

(3) (2) より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= \frac{5}{4}\left(\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5}\right)\end{aligned}$$

であるから，四辺形 ABCD の面積を S とすると，

$$S=\frac{5}{4}\triangle\mathrm{ABD}.$$

また，(1) より，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABD} &= \frac{1}{2}\sqrt{44\cdot 32-32^2}\\ &= 4\sqrt{6}.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}S &= \frac{5}{4}\times 4\sqrt{6}\\ &= 5\sqrt{6}.\end{aligned}$$

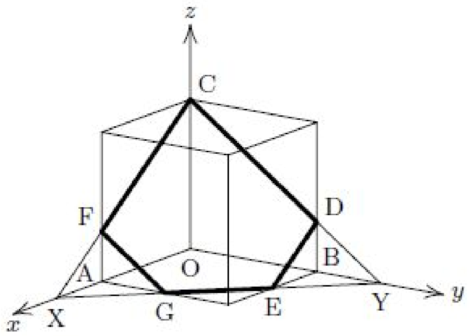
12-6 (r23-2)

xyz 空間に，原点を O とし，3 点 A(6, 0, 0), B(0, 6, 0), C(0, 0, 6) をとる．

OA, OB, OC を辺にもつ立方体を K とし，3 点 C, D(0, 6, 2), E(3, 6, 0) を通る平面を α とする．このとき，立方体の内部にある平面 α の部分の面積を求めよ．

直線 CD と y 軸との交点を Y，直線 YE と x 軸との交点を X とすると，

$$\mathrm{X}(9,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{Y}(0,\ 9,\ 0).$$



このとき，平面 α は 3 点 C，X，Y を通るので，図のように 2 点 $\mathrm{F}(6,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{G}(6,\ 3,\ 0)$ を定めると，立方体の内部にある平面 α の部分は五角形 CFGED である．

さらに，

$$\triangle\mathrm{FGX} \equiv \triangle\mathrm{DEY}$$

であるから，求める面積を S とすると，

$$S = \triangle\mathrm{CXY} - 2\triangle\mathrm{DEY}.$$

ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{CX}} = (9,\ 0,\ -6),\quad \overrightarrow{\mathrm{CY}} = (0,\ 9,\ -6)$$

なので，

$$\triangle\mathrm{CXY} = \frac{1}{2}\sqrt{117 \times 117 - 36^2} = \frac{27\sqrt{17}}{2}.$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{YD}} = (0,\ -3,\ 2),\quad \overrightarrow{\mathrm{YE}} = (3,\ -3,\ 0)$$

なので，

$$\triangle\mathrm{DEY} = \frac{1}{2}\sqrt{13 \times 18 - 9^2} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

以上より，

$$S = \frac{21\sqrt{17}}{2}.$$

12-7 (r24-1)

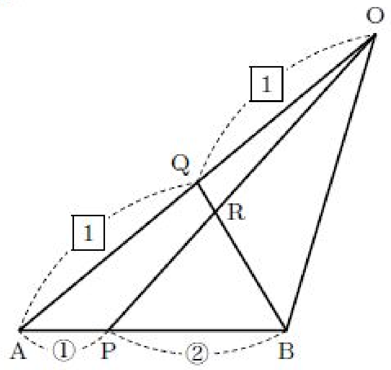
四面体 OABC において，$\mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 1$，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \dfrac{\pi}{3}$ とする．

三角形 OAC の重心を G，辺 AB を $1:2$ に内分する点を P，辺 OA の中点を Q とし，2 直線 OP，BQ の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CR}}$ であるとき，辺 OA の長さを求めよ．さらに，線分 CR の長さを求めよ．

三角形 OAB と 3 点 P，Q，R を図示すると，次の図のようになる．



(1) P，Q の定め方より，

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}), \\ \overrightarrow{OQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}. \end{cases}$$

R が直線 OP 上の点より，

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2}{3}s\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}s\overrightarrow{OB}. \qquad \cdots ①$$

また，R が直線 BQ 上の点より，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{1}{2}t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}. \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

①，②より，

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}s = \dfrac{1}{2}t, \\ \dfrac{1}{3}s = 1 - t. \end{cases}$$

これを解くと，

$$s = \frac{3}{5}, \quad t = \frac{4}{5}$$

であるから，

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}.$$

---

(2) OA $= x$ とすると，条件より，

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \dfrac{1}{2}x, \\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}, \\ \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}x. \end{cases} \qquad \cdots ③$$

また，G の定め方より，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \qquad \cdots ④ \end{aligned}$$

さらに，(1) の結果より，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{5}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 5\overrightarrow{OC}). \qquad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{BG} \perp \overrightarrow{CR}$ のとき，

$$\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CR} = 0.$$

OB $=$ OC $= 1$ であることと，③，④，⑤より，

$$2x^2 - 3 - 5 - \frac{5}{2}x + 8 - \frac{3}{2}x = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x-2) = 0$$

であり，$x > 0$ なので，

$$\text{OA} = x = 2.$$

したがって，⑤より，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CR}|^2 &= \left(\frac{1}{5}\right)^2 |2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 5\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= \frac{1}{25}(16 + 1 + 25 + 4 - 5 - 20) \\ &= \frac{21}{25} \end{aligned}$$

であるから，

$$\text{CR} = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

12-8 (j1-3)

三角形 ABC において $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ である点 O が三角形 ABC の外心であり，三角形 ABC の外接円の半径は r であるとする．このとき，辺 AB の長さを求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2.$$

これと，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=r$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\frac{1}{2}r^2.$$

したがって，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=3r^2\end{aligned}$$

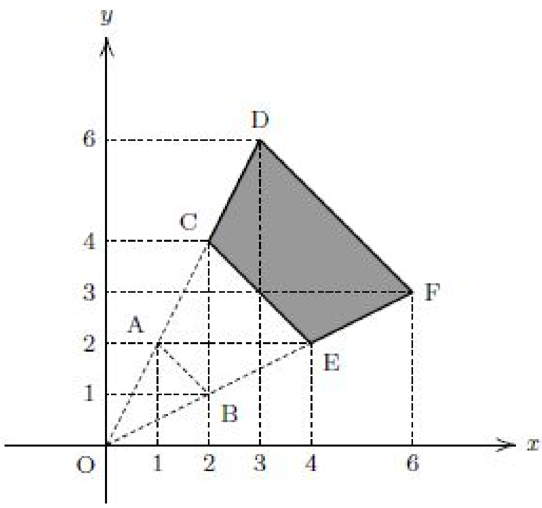
であるから，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{3}r.$$

12-9 (j2-2)

O を原点とする座標平面上に，2 点 A(1，2)，B(2，1) がある．この平面上の動点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表されるものとする．

実数 s，t が不等式 $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$2\leqq s+t\leqq 3$ を満たすすべての値をとるとき，P の動く領域の面積は (　　) である．



求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{OFD}\times\frac{5}{9}\\&=\frac{1}{2}|3\times3-6\times6|\times\frac{5}{9}\\&=\frac{15}{2}.\end{aligned}$$

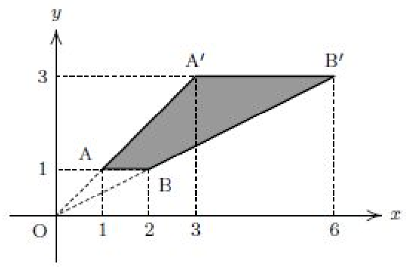
12-10 (s2-2)

平面上において，原点 O と 2 点 A(1, 1)，B(2, 1) に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定められる点 P について考える．

(1) 定数 s，t が条件 $s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$1 \leqq s+t \leqq 3$ を満たしながら変わるとき，点 P の描く図形の面積を求めよ．

(2) (1) の点 P に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の最大値と最小値を求めよ．

(1) A′(3, 3)，B′(6, 3) とすると，点 P の描く図形は四角形 ABB′A′ の内部および周である．



したがって，点 P の描く図形の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}(1+3) \times 2 = 4.$$

(2) P(x, y) に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = k$$

とすると，

$$x + y = k.$$

これより，

$$y = -x + k \qquad \cdots (*)$$

であるから，$(*)$ は傾きが -1，y 切片の直線を表す．

したがって，$(*)$ が (1) で求めた領域と共有点をもちながら変化するときの y 切片の動きを調べればよい．

k が最大となるのは $(*)$ が点 B′ を通るときであり，k が最小となるのは $(*)$ が点 A を通るときであるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の

最大値は 9，　最小値は 2.

12-11 (s3-2)

$\angle A = 60^\circ$ である三角形 ABC に内接する半径 1 の円の中心を I とし，3 辺 BC，CA，AB と，この円との接点をそれぞれ P，Q，R とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{IP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{IQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{IR}}$ は，

$$7\overrightarrow{\mathrm{IP}} + 5\overrightarrow{\mathrm{IQ}} + s\overrightarrow{\mathrm{IR}} = \vec{0}$$

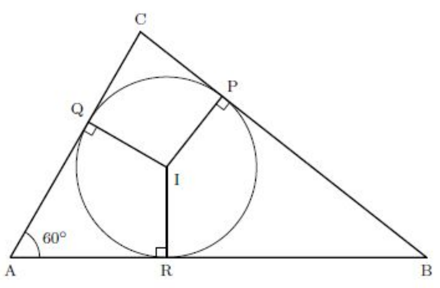
を満たすとする．ただし，$s > 0$ とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{IQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IR}}$ を求めよ．

(2) s の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{IB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{IR}}$ のなす角を α とするとき，$\cos 2\alpha$ および $\tan\alpha$ の値を求めよ．

(4) 三角形 IAB の面積を求めよ．



(1) Q, R の定め方と $\angle A=60^\circ$ より,
$$\angle QIR=120^\circ.$$
これと, $|\overrightarrow{IQ}|=|\overrightarrow{IR}|=1$ より,
$$\overrightarrow{IQ}\cdot\overrightarrow{IR}=-\frac{1}{2}.$$

(2)
$$7\overrightarrow{IP}+5\overrightarrow{IQ}+s\overrightarrow{IR}=\vec{0} \qquad \cdots(*)$$
より,
$$|5\overrightarrow{IQ}+s\overrightarrow{IR}|^2=|-7\overrightarrow{IP}|^2$$
$$25|\overrightarrow{IQ}|^2+10s\overrightarrow{IQ}\cdot\overrightarrow{IR}+s^2|\overrightarrow{IR}|^2=49|\overrightarrow{IP}|^2.$$
$|\overrightarrow{IP}|=|\overrightarrow{IQ}|=|\overrightarrow{IR}|=1$ と (1) の結果より,
$$25-5s+s^2=49$$
$$s^2-5s-24=0$$
$$(s-8)(s+3)=0.$$
$s>0$ より,
$$s=8.$$

(3) (2) の結果より, $(*)$ は,
$$7\overrightarrow{IP}+5\overrightarrow{IQ}+8\overrightarrow{IR}=\vec{0}$$
であるから,
$$|7\overrightarrow{IP}+8\overrightarrow{IR}|^2=|-5\overrightarrow{IQ}|^2$$
$$49+112\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IR}+64=25$$
$$\overrightarrow{IP}\cdot\overrightarrow{IR}=-\frac{11}{14}.$$
さらに, α の定め方より, $\angle PIR=2\alpha$ であるから,
$$\cos 2\alpha=-\frac{11}{14}.$$
これより,
$$2\cos^2\alpha-1=-\frac{11}{14}$$
$$\cos^2\alpha=\frac{3}{28}$$
$$1+\tan^2\alpha=\frac{28}{3}$$
$$\tan^2\alpha=\frac{25}{3}.$$
$\tan\alpha>0$ より,
$$\tan\alpha=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

(4) $AR=IR\tan 60^\circ$, $BR=IR\tan\alpha$ であるから,
$$AB=\sqrt{3}+\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$
したがって,
$$\triangle IAB=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot 1=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

12-12 (j10-2)

平行四辺形 ABCD の辺 CD, DA を 1 : 2 に内分する点をそれぞれ E, F とする.

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EF}$ をそれぞれ $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

(2) 頂点 A を通り, 直線 BD に平行な直線と線分 EF の延長との交点を L とするとき, EF : FL を求めよ.

(3) 線分 AE と線分 BF の交点を P とするとき, AP : PE および BP : PF を求めよ.

四角形 ABCD が平行四辺形であるから,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\\&=\vec{c}-\vec{b}.\end{aligned}$$

(1) F の定め方より,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\\&=\frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b}).\end{aligned}$$
また,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD}&=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\\&=\vec{c}-2\vec{b}.\end{aligned}$$
さらに, E の定め方より,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}\\&=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\\&=\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}.\end{aligned}$$
したがって,
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\\&=\frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})-\left(\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{b}\right)\\&=-\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c}).\end{aligned}$$

(2) AL // BD より，
$$\overrightarrow{AL}=k\overrightarrow{BD}$$
とおけるので，(1) の結果より，
$$\overrightarrow{AL}=-2k\vec{b}+k\vec{c}. \quad \cdots ①$$
また，L は直線 EF 上の点であるから，
$$\overrightarrow{EL}=t\overrightarrow{EF}$$
とおける．

このとき，
$$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{EF}.$$
(1) の結果より，
$$\overrightarrow{AL}=\left(-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\right)\vec{b}+\left(1-\frac{1}{3}t\right)\vec{c}. \quad \cdots ②$$
①，②より，
$$\begin{cases} -2k=-\dfrac{1}{3}t-\dfrac{1}{3}, \\ k=1-\dfrac{1}{3}t. \end{cases}$$
これを解くと，
$$k=\frac{4}{9}, \quad t=\frac{5}{3}.$$
したがって，
$$\overrightarrow{EL}=\frac{5}{3}\overrightarrow{EF}$$
であるから，
$$EF : FL = 3 : 2.$$

(3) P が直線 AE と BF の交点であるから，
$$\begin{cases} \overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AE}, \\ \overrightarrow{BP}=\beta\overrightarrow{BF} \end{cases}$$
とおける．

これと (1) より，
$$\begin{cases} \overrightarrow{AP}=-\dfrac{1}{3}\alpha\vec{b}+\alpha\vec{c}, \\ \overrightarrow{AP}=\left(1-\dfrac{5}{3}\beta\right)\vec{b}+\dfrac{2}{3}\beta\vec{c}. \end{cases}$$
これより，
$$\begin{cases} -\dfrac{1}{3}\alpha=1-\dfrac{5}{3}\beta, \\ \alpha=\dfrac{2}{3}\beta \end{cases}$$
であるから，
$$\alpha=\frac{6}{13}, \quad \beta=\frac{9}{13}.$$
したがって，
$$\begin{cases} \overrightarrow{AP}=\dfrac{6}{13}\overrightarrow{AE}, \\ \overrightarrow{BP}=\dfrac{9}{13}\overrightarrow{BF} \end{cases}$$
であるから，
$$AP : PE = 6 : 7, \quad BP : PF = 9 : 4.$$

12-13 (j16-3)

座標平面上で O を原点とし，直線 l_1 : $y=2x$ 上の点 P と直線 l_2 : $y=-2x$ 上の点 Q の中点を M$(x,\ y)$ とする．P，Q が内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=3$ を満たしながら，それぞれ l_1，l_2 上を動くとき，点 M の軌跡の方程式を x，y を用いて表せ．

P，Q の定め方より，
$$P(p,\ 2p),\quad Q(q,\ -2q)$$
とおけるから，M$(x,\ y)$ の定め方より，
$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(p+q), \\ y=p-q. \end{cases}$$
これより，
$$\begin{cases} p=\dfrac{1}{2}(2x+y), \\ q=\dfrac{1}{2}(2x-y). \end{cases} \quad \cdots ①$$
また，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=3$ より，
$$pq+2p(-2q)=3$$
$$pq=-1. \quad \cdots ②$$
①，②より，
$$\frac{1}{4}(4x^2-y^2)=-1$$
であるから，M の軌跡の方程式は，
$$x^2-\frac{y^2}{4}=-1.$$

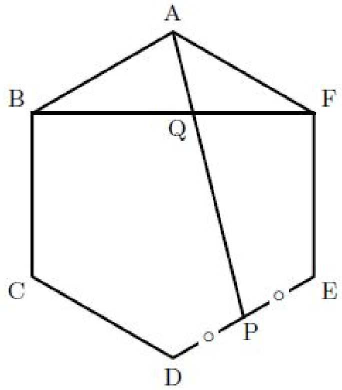
12-14 (j24-2)

正六角形 ABCDEF において，辺 DE の中点を P とし，線分 AP と BF の交点を Q とする．

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AF}$ を用いて表せ．

(2) AQ : QP を最も簡単な整数比で表せ．

(3) $|\overrightarrow{AB}|=1$ のとき，三角形 BPQ の面積を求めよ．



(1)　P が辺 DE の中点であることから，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$$
$$=\frac{1}{2}\{2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})+(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF})\}$$
$$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}.$$

(2)　Q が線分 AP 上にあるから，実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$$

とおけるから，(1) の結果を代入すると，

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}k\overrightarrow{AB}+2k\overrightarrow{AF}.$$

このとき，点 Q が線分 BF 上にある条件は，

$$\frac{3}{2}k+2k=1$$

であるから，

$$k=\frac{2}{7}.$$

したがって，

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QP}=k:(1-k)$$
$$=2:5.$$

(3)　(2) の結果より，

$$\triangle\mathrm{BPQ}=\frac{5}{7}\triangle\mathrm{ABP}$$
$$=\frac{5}{7}\triangle\mathrm{ABD}$$
$$=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

12-15 (j25-3)

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，

$$|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=2,\quad |\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$$

を満たすとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=(\quad)$ である．

また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta=(\quad)$ となる．

$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$ より，

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=12$$
$$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=12$$

であるから，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ より，

$$1^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot 2^2=12.$$

これを解くと，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{5}{4}.$$

したがって，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$=-\frac{5}{8}.$$

12-16 (s25-3)

三角形 OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$$

が成り立つ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の値を求めよ．

(2) 点 P が三角形 OAB の外接円上を動くとき，三角形 PAB の面積の最大値を求めよ．

(3) 点 Q が O を中心とし，半径 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ の円上を動くとき，三角形 QAB の面積の最大値を求めよ．

(1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ より，

$$\begin{cases} |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7, \\ 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7. \end{cases}$$

これと $|\vec{a}| = 1$ より，

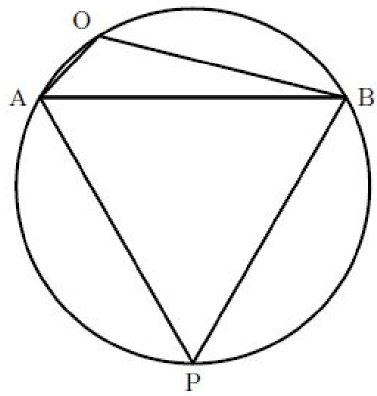
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{3}{2}, \quad |\vec{b}| = 3.$$

したがって，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 13 \end{aligned}$$

であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{13}.$$



(2) (1) より，

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = -\frac{1}{2}$$

であるから，

$$\angle\mathrm{AOB} = 120^\circ.$$

したがって，三角形 PAB の面積が最大となるのは三角形 PAB が正三角形となるとき．

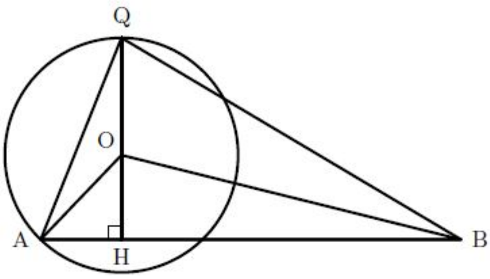
よって，求める最大値は，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{13}\right)^2 = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

---

(3) 辺 AB を底辺と見るとき，三角形 QAB の面積が最大となるのは，Q から直線 AB に下ろした垂線の長さが最大となるとき．

ここで，最大となるときの垂線の足を H とすると，O は直線 QH 上にあり，Q と H は O に関して反対側にある．



したがって，

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$

であるから，(1) より，

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|.$$

これより，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.$$

以上より，三角形 QAB の面積の最大値は，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right) = \frac{2\sqrt{13} + 3\sqrt{3}}{4}.$$

12-17 (j27-3)

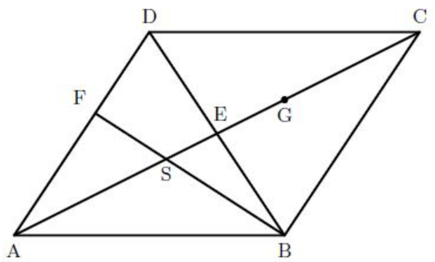
平行四辺形 ABCD において，対角線 BD の中点を E，辺 AD を 3 : 2 に内分する点を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) 三角形 BCD の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) 直線 AE と直線 BF の交点を S とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(3) 線分 AC の長さが 36 のとき，線分 SG の長さを求めよ．

平行四辺形 ABCD と 4 点 E，F，G，S を図示すると，次の図のようになる．



(1) G は三角形 BCD の重心であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}).$$

また，四角形 ABCD が平行四辺形であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}.$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}.$$

---

(2) S が直線 AE 上の点であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AS}} &= \alpha\overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ &= \frac{1}{2}\alpha\vec{b} + \frac{1}{2}\alpha\vec{d}. \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

また，S が直線 BF 上の点であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AS}} &= (1-\beta)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AF}} \\ &= (1-\beta)\vec{b} + \frac{3}{5}\beta\vec{d}. \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

①，②より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\alpha = 1-\beta, \\ \dfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{3}{5}\beta \end{cases}$$

であるから，

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{5}{8}.$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = \frac{3}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{d}.$$

(3) (1)，(2) の結果より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{SG}} &= \overrightarrow{\mathrm{AG}} - \overrightarrow{\mathrm{AS}} \\ &= \frac{7}{24}(\vec{b} + \vec{d}) \\ &= \frac{7}{24}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{SG} &= 36 \cdot \frac{7}{24} \\ &= \frac{21}{2}.\end{aligned}$$

12-18 (s31-2)

xy 平面の原点 O を中心とし半径 1 の円 C 上に定点 A をとる．同じ円上の点 X に対し，平面上の点 Y を

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}})\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

で定める．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の内積である．

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OY}}| = 1$ であることを示せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 X をすべて求めよ．

(3)　点 X が円 C を 1 回まわるとき，点 Y は同じ円を 2 回まわることを示せ．

(1)　2 点 A，X は点 O を中心とする半径 1 の円 C 上の点であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OX}}| = 1. \qquad \cdots ①$$

さらに，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}})\overrightarrow{\mathrm{OX}} \qquad \cdots ②$$

であるから，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OY}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}})\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - 4(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}})^2 + 4(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}})^2|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

したがって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OY}}| = 1.$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のとき，①より，

$$-\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}})\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

であるから，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}})\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}. \qquad \cdots ③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，①より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \cos\theta$$

であるから，③は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \cos\theta\overrightarrow{\mathrm{OX}}.$$

これより，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\cos\theta||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$$

であるから，①より，

$$|\cos\theta| = 1.$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 X は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \text{ または } \overrightarrow{\mathrm{OX}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

を満たす点である．

(3)　A$(1,\ 0)$，X$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすると，②より，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OY}} &= (1,\ 0) - 2\cos\theta(\cos\theta,\ \sin\theta) \\ &= (1 - 2\cos^2\theta,\ -2\sin\theta\cos\theta) \\ &= (-\cos 2\theta,\ -\sin 2\theta) \end{aligned}$$

であるから，点 X が円 C を 1 回まわるとき，点 Y は同じ円 C を 2 回まわる．

12-19 (j34-1)

平面上に平行でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ があり，$|\vec{a}| = 4$，$|\vec{b}| = 3$ とする．

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ のなす角と，$\vec{b}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ のなす角が等しくなるように実数 t の値を定めよ．

(2)　$|\vec{a} - 2\vec{b}|$ のとり得る値の範囲を求めよ．また，$|\vec{a} - 2\vec{b}| = 4$ のとき，$\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ．

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とすると，条件より，

$$\begin{cases} \overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|\cos\theta, \\ \overrightarrow{b}\cdot(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|\cos\theta \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} |\overrightarrow{a}|^2 + t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|\cos\theta, \\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + t|\overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|\cos\theta. \end{cases}$$

$|\overrightarrow{a}|=4$，$|\overrightarrow{b}|=3$ より，

$$\begin{cases} 16 + t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 4|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|\cos\theta, \\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + 9t = 3|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}|\cos\theta. \end{cases}$$

これより，

$$3(16 + t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}) = 4(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + 9t)$$

であるから，

$$(3t-4)(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - 12) = 0.$$

ここで，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行ではないので，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \neq 12.$$

したがって，

$$t = \frac{4}{3}.$$

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行でないことから，

$$||\overrightarrow{a}| - 2|\overrightarrow{b}|| < |\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}| < |\overrightarrow{a}| + 2|\overrightarrow{b}|$$

なので，

$$2 < |\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}| < 10.$$

また，$|\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}| = 4$ のとき，

$$|\overrightarrow{a}|^2 - 4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + 4|\overrightarrow{b}|^2 = 16$$

であるから，

$$16 - 4\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + 36 = 16.$$

したがって，

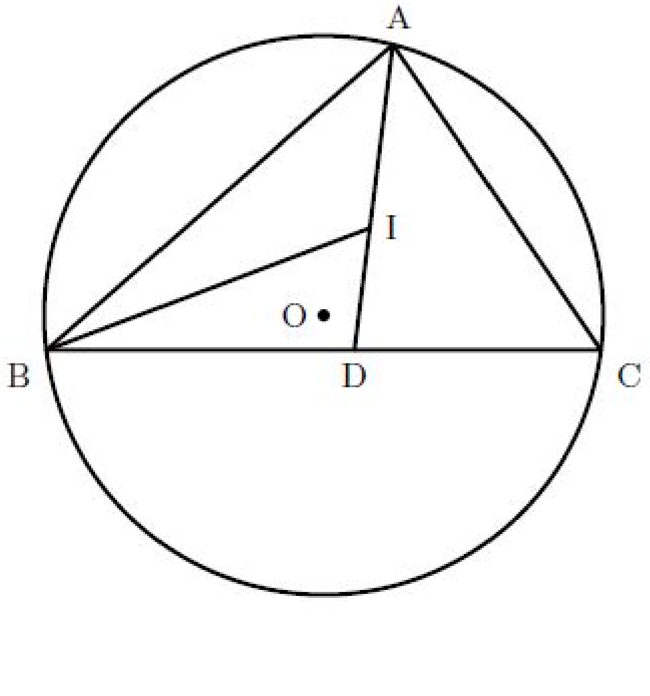
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 9.$$

12-20 (s39-1)

三角形ABCにおいて，BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とする．また，三角形ABCの外心をO，内心をIとし，外接円の半径を R とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$ を示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c}$ を示せ．



(1)　直線 AI と辺 BC の交点を D とすると，点 I が三角形 ABC の内心であることから，

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = c : b.$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{b+c}. \qquad \cdots ①$$

さらに，

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = c : a \times \frac{c}{b+c} = (b+c) : a$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (b+c)\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{a+b+c}. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}. \qquad \cdots ③$$

(2)　内積と余弦定理の関係より，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = R^2 - \dfrac{1}{2}a^2, \\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = R^2 - \dfrac{1}{2}b^2, \\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = R^2 - \dfrac{1}{2}c^2. \end{cases} \qquad \cdots ④$$

さらに，③より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2 = \frac{1}{(a+b+c)^2}\{a^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + b^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + c^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + 2ab\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2bc\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 2ca\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\}. \qquad \cdots ⑤$$

④，⑤と $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = R$ より，

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2 &= \frac{1}{(a+b+c)^2}\{R^2(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca) - (a^2bc + ab^2c + abc^2)\} \\ &= \frac{1}{(a+b+c)^2}\{R^2(a+b+c)^2 - abc(a+b+c)\} \\ &= R^2 - \frac{abc}{a+b+c}. \end{aligned}$$

12-21 (s1-2)

平面上に原点 O から出る，異なる 2 本の半直線 OX，OY をとり $\angle\mathrm{XOY} < 180^\circ$ とする．半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする．

(1)　点 C が $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

と表されることを示せ．

(2)　$\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線と $\angle\mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とする．$\mathrm{OA} = 2$，$\mathrm{OB} = 3$，$\mathrm{AB} = 4$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ．

(1)　$\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線と辺 AB との交点を D とすると，

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = |\vec{a}| : |\vec{b}|$$

であるから，

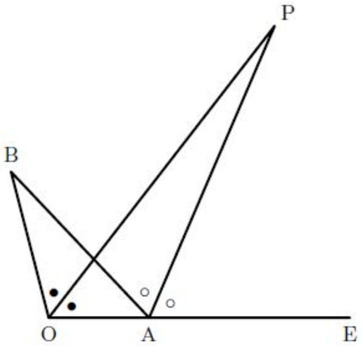
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \\ &= \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right). \end{aligned}$$

これと，C が直線 OD 上にあることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

を満たす実数 t が存在する．

(2) 半直線 OX 上に，OE = 6 となる点 E を O に関して A と同じ側にとる．



P は ∠XAB の二等分線上にあるから，(1) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k(\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}})$$

を満たす実数 k が存在する．

このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (k+1)\vec{a} + k\vec{b}. \qquad \cdots ①$$

また，P は ∠XOY の二等分線上にあるから，(1) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{3}\right). \qquad \cdots ②$$

①，②において，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，

$$\begin{cases} k+1 = \dfrac{s}{2}, \\ k = \dfrac{s}{3}. \end{cases}$$

これを解くと，

$$k = 2, \quad s = 6.$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\vec{a} + 2\vec{b}.$$

12-22 (s9-1)

平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする．

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}, \qquad \vec{b} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$$

とし，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} > 0$ であるようにとる．直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする．

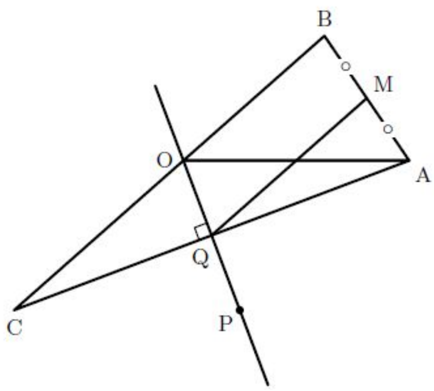
(1) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}| = \dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ．

(1) 直線 OB 上に，O に関して B の反対側に，

$$\mathrm{OC} = \mathrm{OA}$$

を満たす点 C をとる．



このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，P の定め方より，P は ∠AOC の二等分線上の点であるから，Q は線分 AC の中点である．

したがって，三角形 ABC において考えると，中点連結の定理より，

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}} \parallel \vec{b}.$$

(2) (1) より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$$

であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$$

であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|).$$

12-23 (s5-1)

空間に2つの定点O，Aがあり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$ を満たしている．また，2点P，Qは次の条件を満たしながら動く．

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \leqq 5, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{5}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-2$$

ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の内積を表す．次の問に答えよ．

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最小値を求めよ．

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　線分PQの通過してできる部分の体積を求めよ．

12-24 (j3-4)

座標空間に4点A(1, 1, 2)，B(2, 0, 1)，C(1, 1, 0)，D(3, 4, 6)がある．3点A，B，Cの定める平面に関して点Dと対称な点をEとする．点Eの座標を求めよ．

12-25 (j4-5)

四面体OABCにおいて，

$$\mathrm{OA}=1, \quad \mathrm{OB}=2, \quad \mathrm{OC}=3, \quad \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$$

であるとする．

(1)　四面体OABCの体積は $\boxed{\ (1)\ }$ である．

(2)　四面体OABCの表面積は $\boxed{\ (2)\ }$ である．

(3)　頂点Oから三角形ABCまでに下ろした垂線の長さは $\boxed{\ (3)\ }$ である．

(4)　四面体OABCに内接する球の半径は $\boxed{\ (4)\ }$ である．

(5)　四面体OABCに外接する球の半径は $\boxed{\ (5)\ }$ である．

12-26 (s7-2)

a を実数とする．座標空間内の球面 S : $x^2+y^2+z^2=1$ と直線

$$l : (x,\ y,\ z) = (2,\ -1,\ 0) + t(-1,\ a,\ a)$$

が異なる 2 点で交わるとする．

(1)　a の値の範囲を求めよ．

(2)　S と l の 2 つの交点の間の距離 d を a を用いて表せ．

(3)　d が最大となるような実数 a の値とそのときの d を求めよ．

12-27 (j8-3)

四面体 OABC において，三角形 ABC の重心を G，線分 OG を 3 : 2 に内分する点を D，直線 BD と平面 AOC の交点を E，直線 OE と辺 AC との交点を F とする．

このとき，

$$\mathrm{OE} : \mathrm{EF} = (\quad) : (\quad), \qquad \mathrm{BD} : \mathrm{DE} = (\quad) : (\quad)$$

であり，2 つの四面体 ABFO，CEFB の体積比は (　　) : (　　) である．

12-28 (s8-1)

正四面体 OABC に対して，3 点 O，A，B と同じ平面上の点 P が $3\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を満たしている．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　三角形 ABC の重心 G と点 P を結ぶ線分が面 OBC と交わる点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　線分 OB 上の点 R に対して，三角形 PQR が辺 PQ を斜辺とする直角三角形になるとき，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

12-29 (j9-5)

4点 O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 1), C(−1, 2, −1) を頂点とする四面体 OABC がある．このとき，三角形 OBC の面積は $\boxed{\ (1)\ }$ である．

さらに，三角形 OBC を含む平面を π とし，点 A から平面 π に下ろした垂線の足を H とする．

このとき，点 H は平面 π 上の点であるから，実数 s，t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおけ，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \pi$ であることを用いて，s，t の値を求めると，

$$s = \boxed{\ (2)\ }, \quad t = \boxed{\ (3)\ }$$

である．

したがって，四面体 OABC の体積は $\boxed{\ (4)\ }$ である．

また，四面体 OABC に外接する球の半径は $\boxed{\ (5)\ }$ である．

12-30 (j13-4)

xyz 空間における原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球面に内接する正四面体 ABCD があり，点 A の座標は (0, 0, 1) とする．点 B は xz 平面内にあり，点 B の x 座標と，点 C の y 座標は正とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に垂直であることを示せ．

(2) 正四面体 ABCD の一辺の長さを求めよ．

(3) 正四面体 ABCD の頂点 B，C，D の座標を求めよ．

12-31 (s13-2)

すべての面が合同な三角形である四面体OABCを考える．この四面体について，

$$\mathrm{OA} = \sqrt{3}, \qquad \mathrm{OB} = 2, \qquad \mathrm{OC} = \sqrt{5}$$

とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線をOHとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(3) 四面体OABCの体積を求めよ．

12-32 (s16-1)

xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径1の球面 S を考える．点Qが $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上を動くとき，点Qと点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の2点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点をRとする．Rの動く範囲を求め，図示せよ．

12-33 (s17-4)

空間に原点Oを中心とする球 S があり，S の表面上に異なる点A，B，C，Dがある．

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

のとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を用いて表せ．

(2) 長さの比 AB : CD を求めよ．

12-34 (s24-1)

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2},\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2},\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{2}{3}$$

のとき，次の問に答えよ．

(1) 辺 BC を $t:(1-t)$ の比に分ける点を Q，線分 AQ を $s:(1-s)$ の比に分ける点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と s，t を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が平面 ABC と垂直になるとき，s，t の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

12-35 (s26-2)

原点を O とする座標空間において，2 点 A$(3,\ 3,\ 4)$，B$(1,\ 0,\ 0)$ がある．
条件 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ を満たす点 P の集合を C とする．
また，条件 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$ を満たす点 Q の集合を S とする．

(1) Q を S 上の点とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) P を C 上の点とし，Q を S 上の点とする．$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

12-36 (j28-4)

空間に球面 S : $x^2+y^2+z^2-4z=0$ と定点 A$(0,\ 1,\ 4)$ がある．

(1) 球面 S の中心 C の座標と半径を求めよ．

(2) 直線 AC と xy 平面との交点 P の座標を求めよ．

(3) xy 平面上に点 B$(4,\ -1,\ 0)$ をとるとき，直線 AB と球面 S の共有点の座標を求めよ．

(4) 直線 AQ と球面 S が共有点をもつように点 Q が xy 平面上を動く．このとき，点 Q の動く範囲を求めて，それを xy 平面上に図示せよ．

12-37 (s33-3)

h は正の定数で，xyz 座標空間において，次の 4 点 A，B，C，H がある．

$$A(1,\ 0,\ 0),\quad B\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)\quad C\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),\quad H(0,\ 0,\ h)$$

球面 S の中心は z 軸上にある．さらに，4 点 A，B，C，H の 2 点を通る 6 つの直線はどれも球面 S に接していて，すべての接点は四面体 ABCH の 6 つの辺上にある．

(1) 球面 S の半径 r を h の関数として表せ．

(2) h が範囲 $h>0$ で動くとき，球面 S の半径 r の最小値を求めよ．

12-38 (s35-4)

四面体 OABC は，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}=5,\quad \mathrm{OB}=2\sqrt{5},\quad \mathrm{AC}=\sqrt{5},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=10$$

を満たす．四面体 OABC の体積の最大値を求めよ．

12-39 (s38-4)

点 $(7,\ 6,\ 4)$ を中心とする半径 3 の球があり，その表面は鏡でできているものとする．いま，方向ベクトル $(3,\ 2,\ 1)$ をもつ光が原点から発射されたとする．この光は，球面のどの点で反射し，xy 平面とどの点で交わるか．ただし，球面での反射はその点での法線と入射光線を含む平面内で起こり，入射角と反射角は等しいとする．

12-40 (s40-2)

原点を O とする座標空間において，3 点 A$(2,\ 2,\ -1)$，B$(3,\ 2,\ 0)$，C$(2,\ 3,\ 0)$ の定める平面を α とする．また，原点 O から平面 α に垂線を下ろし，α との交点を Q とする．

(1) 点 Q の座標を求めよ．

(2) $\angle\mathrm{OAQ} = \theta$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) a，b，c は実数とし，点 P は次の式を満たすとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

点 P が $a+b+c=0$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の最大値を求めよ．

12-41 (s43-3)

座標空間において，3 点 P$(0,\ 3,\ 3)$，Q$(3,\ 0,\ 3)$，R$(3,\ 3,\ 0)$ を通る平面を L とし，三角形 PQR の L 内の外接円を C とする．また，点 A$(8,\ -7,\ -7)$ を中心とする半径 r の球面を S とする．S と L の交わりは円 D になり，かつ C と D は外接している．

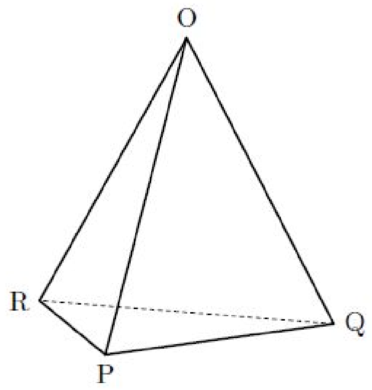
(1) C の中心 G の座標と半径を求めよ．

(2) D の中心 H の座標を求めよ．

(3) r を求めよ．

12-42 (j39-5)

四面体 OPQR において，点 P，Q，R の点 O を基準とする位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とおく。$\mathrm{OP}=4$，$\mathrm{OQ}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{OR}=2\sqrt{7}$ であり，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}=12$ であるとする。



辺 OP 上の点 X を，直線 QX と辺 OP が垂直であるようにとり，辺 OQ 上の点 Y を，直線 PY と辺 OQ が垂直であるようにとる。

(1) 実数 a を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=a\vec{p}$ と表す。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{QX}}=\boxed{\text{ア}}\,\vec{p}-\vec{q}$ である。直線 QX と辺 OP が垂直であるから，$a=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{RX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boxed{\text{エ}}$ である。

同様に $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{q}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{RY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{キ}}$ である。

(2) 直線 QX と直線 PY との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{p}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{q}$$

である。辺 OR 上に点 Z をとり，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=s\vec{r}$ と表す。3 点 P，Q，Z の定める平面を α とし，直線 HR と平面 α との交点を K とする。実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{HK}}=t\overrightarrow{\mathrm{HR}}$ と表す。

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\left(\boxed{\text{シ}}-t\right)\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{p}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{q}\right)+t\vec{r}$$

である。一方，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ は実数 k，l を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{PZ}}+l\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とも表される。これから，

$$t=\frac{s}{\boxed{\text{ス}}-\boxed{\text{セ}}\,s}$$ である。

直線 PZ と辺 OR が垂直であるとき，$s=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，$t=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。