空間ベクトル

基本は平面のときと同じ

○ただし，空間では基準となるベクトルが３本になる。

（平面）$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

（空間）$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

○空間では，空間内の平面を扱う。（三種）

（１）Ｐが平面 ABC 上　⇔　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

（２）Ｐが平面 ABC 上　⇔　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表すと $a+b+c=1$

（３）座標空間内では，点 $\mathrm{A}\left(x_0,\,y_0,\,z_0\right)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=\left(a,\,b,\,c\right)$ の平面は，

$$a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)+c\left(z-z_0\right)+d=0$$

○面積公式をまとめておこう！

外積

外積の定義

$\overrightarrow{a}=\left(x_1,\,y_1,\,z_1\right)$ ，$\overrightarrow{b}=\left(x_2,\,y_2,\,z_2\right)$ に対して，

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ ＝（$y_1z_2-z_1y_2$，$z_1x_2-x_1z_2$，$x_1y_2-y_1x_2$）と定め，

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の外積と呼ぶ。

性質

（１）$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ は，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の両方に垂直

（２）$\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|$ は，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で張られる平行四辺形の面積に等しい

（３）$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ の向きは，$\overrightarrow{a}$ から $\overrightarrow{b}$ へ右ねじを回して決まる向き

外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ の覚え方

$$\begin{array}{lllllll}
\overrightarrow{a} & : & (& x_1 \quad ③ & y_1 \quad ① & z_1 \quad ②) & x_1 \\
\overrightarrow{b} & : & (& x_2 & y_2 & z_2 \quad) & x_2
\end{array}$$

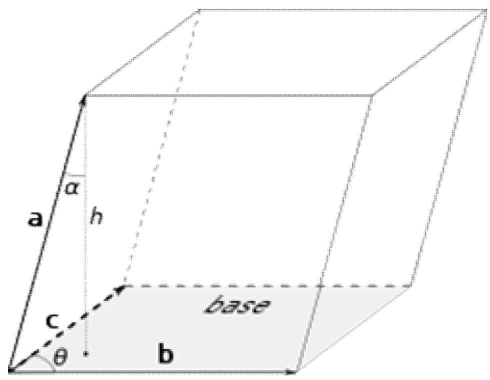
$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ ：（$y_1z_2\overset{①}{-}z_1y_2$，$z_1x_2\overset{②}{-}x_1z_2$，$x_1y_2\overset{③}{-}y_1x_2$）

空間ベクトル・チェックリスト

○　空間の問題では，基準となるベクトルの大きさ・内積を準備しておくとよい。

○　空間内の直線は，通る点と方向ベクトルで決まる
○　空間内の平面は，通る点と法線ベクトルで決まる。
○　空間内の球面は，中心と半径で決まる。

○　垂線の足は，空間でも平面と同じ
○　座標空間内の四面体　⇒　点と平面の距離公式の活用　（法線ベクトルで証明）
○　座標空間内の平行六面体の体積　⇒　「スカラー三重積」



$$V=\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で張られる四面体の場合，係数に $\dfrac{1}{6}$ が付く

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 平面ベクトル篇

標準問題

⑫10-標-1

四面体 ABCD において，線分 BD を 3：1 に内分する点を E，線分 CE を 2：3 に内分する点を F，線分 AF を 1：2 に内分する点を G，直線 DG が 3 点 A，B，C を含む平面と交わる点を H とする。このとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ。

⑫10-標-2

辺の長さが 1 である正四面体 OABC がある。辺 OA を 1：2 に内分する点を P，辺 OB を 3：1 に内分する点を Q，辺 OC の中点を R，△ABC の重心を G とする。さらに，直線 OG と平面 PQR の交点を S，R から平面 OAB に下ろした垂線の足を H とする。

(1)　$\overrightarrow{OS}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ で表せ。

⑫10-標-3

法線ベクトルが $\overrightarrow{p}=\left(-1,2,1\right)$ である平面鏡に，光線がベクトル $\overrightarrow{q}=\left(2,-1,2\right)$ の方向で入射している。反射光線の方向の単位ベクトルを求めよ。

⑫10-標-4

点 $\mathrm{A}\left(-6,2,6\right)$ を通り，方向ベクトルが $\overrightarrow{l}=\left(2,1,-1\right)$ の直線 l と，点 $\mathrm{P}\left(0,-1,-3\right)$ が与えられている。

(1) 点 P から直線 l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(2) 直線 l 上の 2 点 Q, R に対し，三角形 PQR が正三角形になるような Q, R の座標を求めよ。

⑫**10-標-5**

空間に原点Oと3点$\mathrm{A}(1, 2, 2)$, $\mathrm{B}(2, 3, 6)$, $\mathrm{C}(6, 1, 8)$がある。

(1)　3点OABで定まる平面αの方程式を求めよ。

(2)　OA，OBを2辺とする平行四辺形の面積を求めよ。

(3)　OA，OB，OCを3辺とする平行六面体の体積を求めよ。

⑫**10-標-6**

O_1を中心とする球面S_1とO_2を中心とする球面S_2の方程式がそれぞれ次のように与えられている。

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+6x-18y+6z+50=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-34y-10z+194=0 \end{cases}$$

また，これらが交わってできる円をCとする。

(1)　円Cの含む平面αの方程式を求めよ。

(2)　円Cの中心O_3の座標，および円Cの半径を求めよ。

⑫**10-標-7**

球面$x^2+y^2+(z-1)^2=1$と平面$x=t$との交線をCとする$(0<t<1)$。

点$\mathrm{P}(0, 0, 2)$とC上の点Qを通る直線と，xy平面との交点をRとする。QがC上を動くときxy平面上でRの描く軌跡を求めよ。

⑫**10-標-8**

空間において，点$\mathrm{A}(0, -1, 2)$と球面$S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$が与えられている。点Aから球面Sへの任意の接線をひき，それがxy平面と交わる点をPとする。点Pはどんな曲線上にあるか。

発展問題

⑫**10-発-1**

四面体 OABC の辺 OA，OB 上にそれぞれ点 D，E をとる。ただし点 D は点 A，O とは異なり，AE と BD の交点 F は線分 AE，BD をそれぞれ 2：1，3：1 に内分している。また辺 BC を $t:1$ $(t>0)$ に内分する点 P をとり，CE と OP の交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, t を用いて表せ。

(3)　直線 FQ と平面 ABC が平行になるような t の値を求めよ。

⑫**10-発-2**

四面体 OABC があり，∠AOB＝∠AOC＝90°，∠BOC＝60°，辺 OA，OB，OC の長さはそれぞれ $a, a, 2$ である。このとき，点 O から三角形 ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を P とするとき，P が三角形 ABC の内部（辺上を含む）にあるための a の条件を求めよ。

⑫**10-発-3**

四面体 OABC とその内部の点 P があり，次の式を満たしている。

$$2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+5\overrightarrow{\mathrm{BP}}+7\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{0}$$

2 つの四面体 OABC と PABC の体積比を求めよ。

⑫**10-発-4**

点 O を原点とする座標空間内に 3 点 $A(2, 1, 2)$, $B(6, 2, 2)$, $C(5, 7, 5)$ がある。

(1)　B，C から直線 OA に引いた垂線の足 H，K の座標を求めよ。

(2)　点 P が直線 OA 上を動くとき，BP＋CP を最小にする P の座標を求めよ。

⑫**10-発-5**

空間に 2 点 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$，$B(0, \sqrt{2}, 0)$ がある。z 軸上に点 $P(0, 0, p)$　$(p>0)$ があり，$\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ のなす角は 45° である。また，3 点 A，B，P を通る平面を α とする。

(1)　p の値を求めよ。

(2)　平面 α に関して，原点 $O(0, 0, 0)$ と対称な点の座標を求めよ。

⑫**10-発-6**

a，b，c を 0 でない実数として，座標空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$，$B(0, b, 0)$，$C(0, 0, c)$ をとる．また，空間内の点 P は $\overrightarrow{AP} \cdot \left(\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}\right) = 0$ を満たしながら動くとする．

(1) 点 P はある点 Q を中心とする球面上にあることを示せ．

(2) (1) の点 Q は 3 点 A，B，C を通る平面上にあることを示せ．

(3) 四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ．

⑫**10-発-7**

xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面を S とする．S の外側にある点 P に対し，OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を α とする．点 P と点 A から平面 α へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．

このとき，

$$\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{AR}$$

であるような点 P の動く範囲の体積を求めよ．

⑫**10-発-8**

空間内で原点 O を中心とする半径 1 の球面上に，$\mathrm{N}(0, 0, 1)$，$\mathrm{S}(0, 0, -1)$ と異なる点 P をとって，P と N，P と S を結ぶ直線が xy 平面と交わる点を，それぞれ $\mathrm{Q}(x, y, 0)$，$\mathrm{R}(X, Y, 0)$ とする。Q が円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上を動くとき，R はどんな曲線上を動くか。

⑫10-発-9

空間における曲線 C が，媒介変数 t（$0 \leqq t < 2\pi$）を用いて

$$x = \sqrt{3}\cos t + \sin t$$
$$y = \sqrt{3}\cos t - \sin t$$
$$z = 2\sin t$$

で与えられる．

(1) 曲線 C は原点を中心とする円であることを示せ．

(2) 曲線 C を xy 平面へ正射影してできる図形の方程式を求めよ．

⑫10-発-10

xyz 空間の 2 点 P，Q を△OPQ（O は原点）の面積が正の一定値 S となるように動かす．P，Q から xy 平面に引いた垂線をそれぞれ PP$'$，QQ$'$ とし，△OP$'$Q$'$ の面積を S_1 とする．ただし，O，P$'$，Q$'$ が同一直線上にあるときは $S_1 = 0$ とする．同様に P，Q から yz 平面，zx 平面に垂線を引いて作った三角形の面積を S_2，S_3 とする．

(1) $S^2 = {S_1}^2 + {S_2}^2 + {S_3}^2$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $S_1 + S_2 + S_3$ の最大値，最小値を求めよ．

SoyPaste 空間ベクトル

SP⑫10-1(r35-1)　△

空間に定点 A$(0,\ 4,\ 2)$，B$(2\sqrt{3},\ 2,\ 2)$ と動点 P$(0,\ 0,\ p)$ がある．∠APB の大きさの最大値と，そのときの p の値を求めよ．

SP⑫10-2 (r28-1)　○

座標空間に 4 点 A$(1,\ 0,\ 1)$，B$(-1,\ 2,\ -5)$，C$(-3,\ 1,\ -5)$，D$(-3,\ 0,\ -3)$ をとる．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{q}$ とするとき，三角形 ABD の面積は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}$$

に等しいことを示せ．

(2) 点 C は，3 点 A，B，D で定まる平面上にあることを示せ．

(3) 四辺形 ABCD の面積を求めよ．

SP⑫10-3 (r23-2)　☆

xyz 空間に，原点を O とし，3 点 A$(6,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 6,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 6)$ をとる．

OA，OB，OC を辺にもつ立方体を K とし，3 点 C，D$(0,\ 6,\ 2)$，E$(3,\ 6,\ 0)$ を通る平面を α とする．このとき，立方体の内部にある平面 α の部分の面積を求めよ．

SP⑫10-4 (r24-1)　△

四面体 OABC において，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{3}$ とする．

三角形 OAC の重心を G，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P，辺 OA の中点を Q とし，2 直線 OP，BQ の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ であるとき，辺 OA の長さを求めよ．さらに，線分 CR の長さを求めよ．

SP⑫10-5 (s5-1)　○

空間に 2 つの定点 O，A があり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$ を満たしている．また，2 点 P，Q は次の条件を満たしながら動く．

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \leqq 5, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}=6, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{5}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}=-2$$

ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の内積を表す．次の問に答えよ．

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最小値を求めよ．

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　線分 PQ の通過してできる部分の体積を求めよ．

SP⑫10-6 (j3-4)　○

座標空間に 4 点 A(1，1，2)，B(2，0，1)，C(1，1，0)，D(3，4，6) がある．3 点 A，B，C の定める平面に関して点 D と対称な点を E とする．点 E の座標を求めよ．

SP⑫10-7 (j4-5)　○

四面体 OABC において，

$$\mathrm{OA}=1, \quad \mathrm{OB}=2, \quad \mathrm{OC}=3, \quad \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$$

であるとする．

(1)　四面体 OABC の体積は $\boxed{\ (1)\ }$ である．

(2)　四面体 OABC の表面積は $\boxed{\ (2)\ }$ である．

(3)　頂点 O から三角形 ABC までに下ろした垂線の長さは $\boxed{\ (3)\ }$ である．

(4)　四面体 OABC に内接する球の半径は $\boxed{\ (4)\ }$ である．

(5)　四面体 OABC に外接する球の半径は $\boxed{\ (5)\ }$ である．

SP⑫10-8 (s7-2)　○

a を実数とする．座標空間内の球面 S : $x^2+y^2+z^2=1$ と直線

$$l : (x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+t(-1,\ a,\ a)$$

が異なる2点で交わるとする．

(1) a の値の範囲を求めよ．

(2) S と l の2つの交点の間の距離 d を a を用いて表せ．

(3) d が最大となるような実数 a の値とそのときの d を求めよ．

SP⑫10-9 (j8-3)　△

四面体OABCにおいて，三角形ABCの重心をG，線分OGを3：2に内分する点をD，直線BDと平面AOCの交点をE，直線OEと辺ACとの交点をFとする．

このとき，

$$\mathrm{OE}:\mathrm{EF}=(\quad):(\quad),\qquad \mathrm{BD}:\mathrm{DE}=(\quad):(\quad)$$

であり，2つの四面体ABFO，CEFBの体積比は (　　) : (　　) である．

SP⑫10-10 (s8-1)

正四面体OABCに対して，3点O，A，Bと同じ平面上の点Pが $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を満たしている．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) 三角形ABCの重心Gと点Pを結ぶ線分が面OBCと交わる点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) 線分OB上の点Rに対して，三角形PQRが辺PQを斜辺とする直角三角形になるとき，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

SP⑫10-11 (j9-5)　○

4点O(0, 0, 0), A(1, 0, 0), B(1, 1, 1), C(−1, 2, −1) を頂点とする四面体OABC がある．このとき，三角形OBC の面積は $\boxed{\ (1)\ }$ である．

さらに，三角形OBC を含む平面を π とし，点A から平面 π に下ろした垂線の足をH とする．

このとき，点H は平面 π 上の点であるから，実数 s, t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおけ，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \pi$ であることを用いて，s, t の値を求めると，

$$s = \boxed{\ (2)\ },\quad t = \boxed{\ (3)\ }$$

である．

したがって，四面体OABC の体積は $\boxed{\ (4)\ }$ である．

また，四面体OABC に外接する球の半径は $\boxed{\ (5)\ }$ である．

SP⑫10-12 (j13-4)　○

xyz 空間における原点O(0, 0, 0) を中心とする半径1の球面に内接する正四面体ABCD があり，点A の座標は (0, 0, 1) とする．点B は xz 平面内にあり，点B の x 座標と，点C の y 座標は正とする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に垂直であることを示せ．

(2)　正四面体ABCD の一辺の長さを求めよ．

(3)　正四面体ABCD の頂点B, C, D の座標を求めよ．

SP⑫10-13 (s13-2)　○

すべての面が合同な三角形である四面体 OABC を考える．この四面体について，

$$\mathrm{OA}=\sqrt{3},\qquad \mathrm{OB}=2,\qquad \mathrm{OC}=\sqrt{5}$$

とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 点 O から 3 点 A，B，C を含む平面に下ろした垂線を OH とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

SP⑫10-14 (s16-1)　☆

xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える．点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とする．R の動く範囲を求め，図示せよ．

SP⑫10-15 (s17-4)

空間に原点 O を中心とする球 S があり，S の表面上に異なる点 A，B，C，D がある．

$$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

のとき，次の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を用いて表せ．

(2) 長さの比 AB : CD を求めよ．

SP⑫10-16 (s24-1)

四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2},\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2},\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{2}{3}$$

のとき，次の問に答えよ．

(1) 辺BCを $t:(1-t)$ の比に分ける点をQ，線分AQを $s:(1-s)$ の比に分ける点をPとする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と s，t を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が平面ABCと垂直になるとき，s，t の値を求めよ．

(3) 四面体OABCの体積を求めよ．

SP⑫10-17 (s26-2)

原点をOとする座標空間において，2点A$(3,\ 3,\ 4)$，B$(1,\ 0,\ 0)$がある．

条件 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ を満たす点Pの集合を C とする．

また，条件 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$ を満たす点Qの集合を S とする．

(1) Qを S 上の点とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) Pを C 上の点とし，Qを S 上の点とする．$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

SP⑫10-18 (j28-4)

空間に球面 $S:x^2+y^2+z^2-4z=0$ と定点A$(0,\ 1,\ 4)$がある．

(1) 球面 S の中心Cの座標と半径を求めよ．

(2) 直線ACと xy 平面との交点Pの座標を求めよ．

(3) xy 平面上に点B$(4,\ -1,\ 0)$をとるとき，直線ABと球面 S の共有点の座標を求めよ．

(4) 直線AQと球面 S が共有点をもつように点Qが xy 平面上を動く．このとき，点Qの動く範囲を求めて，それを xy 平面上に図示せよ．

SP⑫10-19 (s33-3)　☆

h は正の定数で，xyz 座標空間において，次の 4 点 A，B，C，H がある．

$$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{B}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)\quad \mathrm{C}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{H}(0,\ 0,\ h)$$

球面 S の中心は z 軸上にある．さらに，4 点 A，B，C，H の 2 点を通る 6 つの直線はどれも球面 S に接していて，すべての接点は四面体 ABCH の 6 つの辺上にある．

(1) 球面 S の半径 r を h の関数として表せ．

(2) h が範囲 $h>0$ で動くとき，球面 S の半径 r の最小値を求めよ．

SP⑫10-20 (s35-4)　☆

四面体 OABC は，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}=5,\quad \mathrm{OB}=2\sqrt{5},\quad \mathrm{AC}=\sqrt{5},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=10$$

を満たす．四面体 OABC の体積の最大値を求めよ．

SP⑫10-21 (s38-4)　☆

点 $(7,\ 6,\ 4)$ を中心とする半径 3 の球があり，その表面は鏡でできているものとする．いま，方向ベクトル $(3,\ 2,\ 1)$ をもつ光が原点から発射されたとする．この光は，球面のどの点で反射し，xy 平面とどの点で交わるか．ただし，球面での反射はその点での法線と入射光線を含む平面内で起こり，入射角と反射角は等しいとする．

SP⑫10-22 (s40-2)

原点をOとする座標空間において，3点 A$(2,\ 2,\ -1)$，B$(3,\ 2,\ 0)$，C$(2,\ 3,\ 0)$ の定める平面を α とする．また，原点Oから平面 α に垂線を下ろし，α との交点をQとする．

(1) 点Qの座標を求めよ．

(2) $\angle\mathrm{OAQ}=\theta$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(3) a，b，c は実数とし，点Pは次の式を満たすとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

点Pが $a+b+c=0$ かつ $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の最大値を求めよ．

SP⑫10-23 (s43-3)

座標空間において，3点 P$(0,\ 3,\ 3)$，Q$(3,\ 0,\ 3)$，R$(3,\ 3,\ 0)$ を通る平面を L とし，三角形PQRの L 内の外接円を C とする．また，点A$(8,\ -7,\ -7)$ を中心とする半径 r の球面を S とする．S と L の交わりは円 D になり，かつ C と D は外接している．

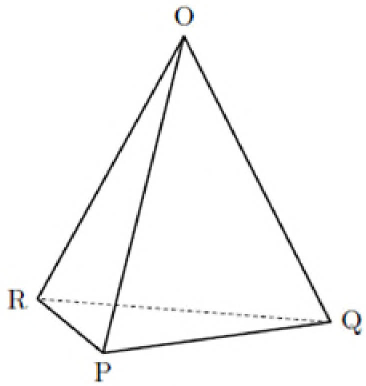
(1) C の中心Gの座標と半径を求めよ．

(2) D の中心Hの座標を求めよ．

(3) r を求めよ．

SP⑫10-24 (j39-5)

四面体 OPQR において，点 P，Q，R の点 O を基準とする位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とおく。$\mathrm{OP}=4$，$\mathrm{OQ}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{OR}=2\sqrt{7}$ であり，$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}=12$ であるとする。



辺 OP 上の点 X を，直線 QX と辺 OP が垂直であるようにとり，辺 OQ 上の点 Y を，直線 PY と辺 OQ が垂直であるようにとる。

(1) 実数 a を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=a\vec{p}$ と表す。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{QX}}=\boxed{\text{ア}}\vec{p}-\vec{q}$ である。直線 QX と辺 OP が垂直であるから，$a=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{RX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boxed{\text{エ}}$ である。

同様に $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{q}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{RY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{キ}}$ である。

(2) 直線 QX と直線 PY との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{p}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{q}$$

である。辺 OR 上に点 Z をとり，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=s\vec{r}$ と表す。3 点 P，Q，Z の定める平面を α とし，直線 HR と平面 α との交点を K とする。実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{HK}}=t\overrightarrow{\mathrm{HR}}$ と表す。

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\left(\boxed{\text{シ}}-t\right)\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{p}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{q}\right)+t\vec{r}$$

である。一方，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ は実数 k，l を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{PZ}}+l\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とも表される。これから，

$t=\dfrac{s}{\boxed{\text{ス}}-\boxed{\text{セ}}s}$ である。

直線 PZ と辺 OR が垂直であるとき，$s=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，$t=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。