

試験時間50分 解答は解答用紙に書いて、提出してください
 私立クラスは5を、国立クラスは6を解いてください。

1 a, b は正の定数とする。関数 $y = x + \sqrt{a - bx^2}$ の最大値が2, 最小値が $-\sqrt{3}$ となるように a, b の値を定めよ。

2 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ とおく。ただし, e は自然対数の底とする。

(1) $y = f(x)$ の増減, 凹凸, 漸近線を調べ, グラフをかけ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \right\}$ を求めよ。

3 a を実数とする。このとき, 曲線 $y = e^x$ と $y = (x - a)^2$ の両方に接する直線が存在するような a の値の範囲を求めよ。

4 デパートに来た客 100 人の買い物調査をしたところ, A 商品を買った人は 80 人, B 商品を買った人は 70 人であった。両方とも買った人数のとりうる最大値は \square で, 最小値は \square である。

5 私立クラスの問題

周の長さが1である長方形 ABCD の辺 AB の長さを x で表す。ただし、 $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ とする。直線 AC に関して点 B と対称な点を E、直線 AE と直線 CD との交点を F、 $\triangle CEF$ の面積を S で表す。

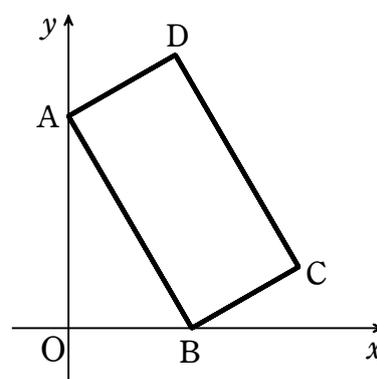
(1) 線分 EF の長さを x の式で表すと、 $EF = \frac{\text{ア} \square - \text{イ} \square}{\text{ウ} \square}$ である。

(2) S を x の式で表すと、 $S = \frac{\text{エ} \square x^{\text{オ} \square} + \text{カ} \square x - \text{キ} \square}{\text{ク} \square}$ である。

(3) S の最大値は $\frac{\text{ケ} \square}{\text{コ} \square} - \frac{\sqrt{\text{サ} \square}}{\text{シ} \square}$ である。

6 国立クラスの問題

原点を O とする座標平面上、長方形 ABCD が図のように頂点 A は y 軸の正の部分に、頂点 B は x 軸の正の部分に、頂点 C, D は第 1 象限内におかれている。
 $AB=2, BC=1$ とし $\angle OAB=t$ とおく。ただし、 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ とする。



- (1) 長方形 ABCD の周で $y \leq 1$ にある部分の長さを $f(t)$ とおく。 $f(t)$ を求めよ。
- (2) $f(t) = 3$ が成り立つときの $\cos t, \sin t$ の値を求めよ。
- (3) t が $0 < t < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $f(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。