昭和大学｜医学部｜一期｜数学　確率セレクション

【１】

(4)　ある病院のある日の外来受診者は，男性 200 名，女性 800 名であった。またそのうち，男性の 40%，女性の 20%が病気であった。この日の受診者の中から，どの人も平等に選ばれるような方法で 1 人を選ぶとき，次の確率を求めよ。

(4-1)　選ばれた人が病気である確率

(4-2)　選ばれた人が病気の男性である確率

【２】

文字 A，C，G，T のいずれか 1 つだけが書かれた 4 種類の札が何枚かある。いまその中から何枚かの札を取り出して，左から順に一列に並べることを考える。

4 種類の札がそれぞれ 1 枚ずつあるとし，これから 3 枚を取り出して並べるとする。次の問(1)，(2)に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　全部で何通りの並べ方があるか。その総数を求めよ。

(2)　「札 A が札 C の左にある」という事象をⅠ，「札 T が並びの中に含まれる」という事象をⅡで表す。

(2-1)　事象Ⅱが起こったときの事象Ⅰが起こる条件つき確率を求めよ。

(2-2)　【教科書範囲外】事象Ⅰと事象Ⅱは独立か否か。理由を述べて答えよ。

次に，札 A と札 G が 3 枚ずつ，札 C が 2 枚，札 T が 1 枚の合計 9 枚の札があるとし，この 9 枚を全部並べるとする。次の問(3)，(4)に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(3)　全部で何通りの並べ方があるか。その総数を求めよ。

(4)　並べた 9 枚の札を，左から 1～3 番目，4～6 番目，7～9 番目の 3 箇所に区切る。この 3 箇所の各 3 枚の並べ方がいずれも(1)で現れる並べ方のどれかに該当するような 9 枚の並べ方は全部で何通りあるか。その総数を求めよ。また，そのような 9 枚の並べ方が現れる確率を求めよ。

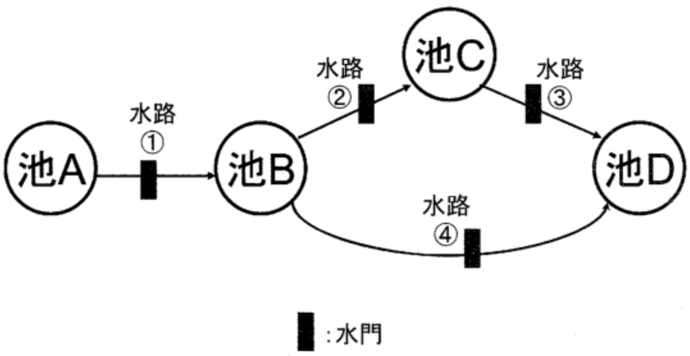
【３】

次の『 』の中の文章を読み，以下の問(1)～(5)に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

『下図のように，4 つの水路①～④で結ばれた 4 つの池 A～D がある。池の高さの違いにより，池 A の水は水路①を経て池 B に流れ込み，続いて 2 つの水路②および④を経て流れる。水路②を通った水は池 C に流れ込み，さらに水路③を経て池 D に到達する。また，水路④を通った水は池 D に直接流れ込む。なお水量が十分にあるとき，各池に流れ込んだ水は下流に流れてもその一部は池に残る。

4 つの水路にはそれぞれ途中に水門があり，水門が閉じているとき水は下流に流れない。各水門の開閉は互いに独立に定まり，水路①～④の各水門が開いている確率はそれぞれ p_1 ～ p_4 (いずれも 0 以上 1 以下の実数)である。

今，4 つの池に水が無いことを確認した後，池 A に十分な量の水を注ぎ込むとする。』



(1)　水が池 C に流れ込む確率を求めよ。

(2)　水が池 D に流れ込む確率を求めよ。

(3)　$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$ とする。次の各条件付確率を求めよ。

(3－1)　池 D に水が到達しているとき，池 C に水が流れ込んでいる確率。

(3－2)　池 D に水が到達していないとき，池 C に水が流れ込んでいる確率。

(4)　$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$ とする。水路②か水路④のどちらか一方のみを通って水が池 D に到達する確率を求めよ。

(5)　(4)の確率が最大となる p の値を求めよ。

【4】

『　　　』内の文章を読み，以下の問(1)〜(4)に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

『疾患 D に関係する 2 種類の遺伝子 XA と XB がある。人は必ず XA か XB のどちらか一方のみを持ち，どちらも持たない，あるいは両方を持つという人は存在しないものとする。

今，無作為に 1 人の人を抽出すると，その人が XA を持つ確率が 0.2 である集団について考える。この集団に属しかつ XA を持つ人の中から，無作為に 1 人の人を抽出すると，その人が疾患 D である確率は $a(0 \leqq a \leqq 1)$ である。同様に，この集団に属しかつ XB を持つ人の中から，無作為に 1 人の人を抽出すると，その人が疾患 D である確率は $b(0 \leqq b \leqq 1)$である。』

(1)　この集団から無作為に 1 人を抽出しその人を元に戻す。これを 2 回繰り返したところ，抽出された 2 人のうち，一方の人が XA を持ち，残りの人が XB を持っていた。この条件の下で，この 2 人が両方とも疾患 D である条件つき確率を求めよ。

(2)　この集団から無作為に 1 人を抽出するとき，その人が疾患 D である確率を求めよ。

(3)　この集団から無作為に 1 人を抽出したところ，その人は疾患 D であった。この条件の下で，この人が XA を持つ条件つき確率を求めよ。

(4)　(3)の確率が 0.5 以上となるために，a，b が満たすべき条件を求めよ。

【５】

(3)　3 人がじゃんけんをして，1 人だけ勝者を決める。3 人はそれぞれグー，チョキ，パーを同じ確率で出すとする。勝者がいない場合は再びじゃんけんをする。勝者が 2 人の場合はその 2 人でじゃんけんをする。2 人でじゃんけんをしたとき，勝者がいない場合は再びその 2 人でじゃんけんをする。

(3－1)　1 回目のじゃんけんで勝者がいない確率を求めよ。

(3－2)　2 回じゃんけんをしても，勝者が 1 人に決まらない確率を求めよ。

(3－3)　n は正の整数とする。n 回じゃんけんを続けても勝者が 1 人に決まらない確率を求めよ。

【６】

次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(3)　1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚の同じ形のカードがある。ただし，n は 2 以上の整数である。この n 枚のカードから，元に戻さずに 1 枚ずつ 2 回無作為に抜き出すとする。2 回目に抜き出したカードの番号が 1 回目の番号より大きければ，2 回目のカードの番号を得点とする。そうでなければ得点は 0 とする。次の問に答えよ。

(3－1)　m は $1 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。2 回目のカードの番号が m となる確率を求めよ。

(3－2)　m は(3－1)と同じとする。得点が m となる確率を求めよ。

(3－3)　得点が 0 となる確率を求めよ。

(3－4)　得点の期待値を求めよ。

【7】

次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　1 から 8 までの数字を 1 つずつ記した 8 個の球が袋の中に入っている。この袋から 1 個の球を取り出し，その数字を読み取ってはもとの袋に戻す操作を 3 回繰り返す。ただし，どの球が選ばれる確率も同じであるとする。いま，読み取った 3 個の数字のうち最大の数と最小の数の差を R とする。次の問に答えよ。

(1－1)　$R=1$ となる確率を求めよ。

(1－2)　$R=4$ となる確率を求めよ。

(1－3)　R の期待値を求めよ。

【８】

次の各問に答えよ。ただし，(1)(2)については答は結果のみを解答欄に記入せよ。
また，10!，9!のような大きな数の階乗や累乗は，値を計算せずに$a!$やa^mのような表記でもよい。

(1)　中身が見えない袋の中に，1 個の赤玉と 9 個の白玉が入っている。この袋の中から玉を 1 つ取り出して色を確認し，またもとに戻すという試行を 10 回繰り返すとする。このとき，赤玉が 8 個出る確率を求めよ。

(2)　中身が見えない袋の中に，1 個の赤玉と$n-1$個の白玉が入っている。この袋の中から玉を 1 つ取り出して色を確認し，またもとに戻すという試行を n 回繰り返すとする。このとき，赤玉が 8 個出る確率をP_nとする。P_nを n の式で表せ。ただし，$n \geqq 8$とする。

(3)　$\lim_{n \to \infty} P_n$の値を求めよ。