慈恵医大｜数学｜セレクション２

【１】2013 東京慈恵会医科大学 2/5，1次 医

次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1)　数直線上を動く点 P が原点の位置にある。2 個のさいころを同時に投げる試行を T とし，試行 T の結果によって，P は次の規則で動く。

(規則)　2 個のさいころの出た目の積が偶数ならば+2 だけ移動し，奇数ならば+1 だけ移動する。

試行 T を n 回繰り返し行ったときの P の座標を x_n とすると，$x_1=2$ となる確率は $\boxed{(ア)}$ であり，$x_3=3$ かつ $x_4=5$ となる確率は $\boxed{(イ)}$ である。また，P が座標 4 以上の点に初めて到達するまで試行 T を繰り返し行うとき，試行回数の期待値は $\boxed{(ウ)}$ である。

(2)　平面上に 3 点 O，A，B があり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ をみたしている。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\boxed{(エ)}$ である。また，実数 s，t が条件 $1\leqq s+3t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ をみたしながら動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定められた点 P の存在する範囲の面積は $\boxed{(オ)}$ である。

解　(1)　(ア)　出た目の積が偶数となるときである．積が奇数となるのは 2 個とも奇数のときで，確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{1}{4}$ だから，偶数となる確率は $1-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$.

(イ)　4 回の移動で順に $+1$，$+1$，$+1$，$+2$ だけ進む場合だから，確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{256}}$.

(ウ)　回数としてありうるのは 2，3，4 のみである．

2 回となるのは 2 回の移動で $+2$ ずつ進む場合だから，確率は $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$.

4 回となるのは最初の 3 回の移動で $+1$ ずつ進む場合だから，確率は $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$.

よって，期待値は

$$2\times\frac{9}{16}+3\times\left(1-\frac{9}{16}-\frac{1}{64}\right)+4\times\frac{1}{64}$$
$$=\frac{2\times 36+3\times 27+4\times 1}{64}=\boldsymbol{\frac{157}{64}}.$$

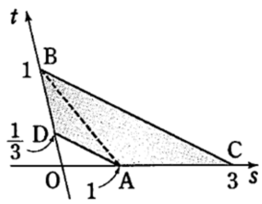
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ と略記する．

(エ)　条件より $|\vec{a}+\vec{b}|^2=1$，$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=1$ である．$|\vec{a}|=1$ を用いると

$$1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1,\quad 4+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$$
$$\therefore\quad 2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=0,\quad 4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=-3$$

となるから，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$，$|\vec{b}|^2=3$，$|\vec{b}|=\boldsymbol{\sqrt{3}}$.

(オ)　O を原点とし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ で張られる右図のような座標平面を考える．$1\leqq s+3t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ は図の網目部分（境界含む）を表し，図のように点 C，D をとると，面積は



$$\triangle\mathrm{OBC}-\triangle\mathrm{OAD}=\left(3-\frac{1}{3}\right)\triangle\mathrm{OAB}=\frac{8}{3}\triangle\mathrm{OAB}$$

となる．ここで，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 3-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

なので，答えは $\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ である．

【２】2013 東京慈恵会医科大学 2/5, 1次 医

θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ をみたす実数とする。 xyz 空間内の平面 $z=0$ 上に 2 点 $\mathrm{P}_\theta(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ ， $\mathrm{Q}_\theta(2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)$ をとり，θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で動かすとき，線分 $\mathrm{P}_\theta\mathrm{Q}_\theta$ が通過する部分を D とする。空間内の $z \geqq 0$ の部分において，底面が D， $\mathrm{P}_\theta\mathrm{Q}_\theta$ 上の各点での高さが $\dfrac{2}{\pi}\theta$ の立体 K を考える。半球 $B : x^2+y^2+z^2 \leqq 2^2$， $z \geqq 0$ と K の共通部分を L とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　B を平面 $z=t\ (0 \leqq t < 2)$ で切った切り口の円の半径を t を用いて表せ。

(2)　L の体積を求めよ。

解　(1)　B の $z=t$ の部分は

$$x^2+y^2+t^2 \leqq 2^2 \quad \therefore \quad x^2+y^2 \leqq 4-t^2$$

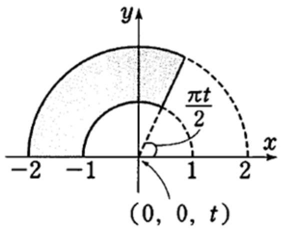
なので，半径は $\sqrt{4-t^2}$ である.

(2)　K を $z=t$ で切ると，

高さ $\dfrac{2}{\pi}\theta$ が t 以上となる

θ に対応する部分，つまり

$\dfrac{\pi t}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の部分が残る.



よって，K の $z=t$ における切り口は上図網目部.

これと B の共通部分，つまり $(0,\ 0,\ t)$ からの距離 r が $\sqrt{4-t^2}$ 以下でもある部分を考える.

$\sqrt{4-t^2}<1$ つまり $t>\sqrt{3}$ のときは，共通部分は空集合となる.

$\sqrt{4-t^2} \geqq 1$ つまり $t \leqq \sqrt{3}$ のときは，切り口のうち，$1 \leqq r \leqq \sqrt{4-t^2}$ の部分となる．その面積は，

$$\frac{1}{2}\{(4-t^2)-1^2\}\left(\pi-\frac{\pi t}{2}\right)=\frac{\pi}{4}(3-t^2)(2-t)$$

$$=\frac{\pi}{4}(6-3t-2t^2+t^3)$$

となる．以上から，L の体積は，

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{4}(6-3t-2t^2+t^3)\,dt$$

$$=\left[\frac{\pi}{4}\left(6t-\frac{3}{2}t^2-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4\right)\right]_0^{\sqrt{3}}=\left(\sqrt{3}-\frac{9}{16}\right)\pi.$$

【３】2015 東京慈恵会医科大学 2/5,一般(１次)東京都地域枠含む 医

次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1)　A，B の 2 人が次のようなゲームを行う。

赤玉 2 個，白玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を調べてからもとに戻す。取り出した玉の色により，赤玉のときは A が 1 点を得て，白玉のときは B が 2 点を得る。この試行を繰り返し，先に 3 点以上得た方を勝ちとしてゲームを終了する。　このとき，B が勝つ確率は $\boxed{(ア)}$ である。また，ゲームが 3 回目の試行により終了する確率は $\boxed{(イ)}$ である。

(2)　四面体 ABCD において，$AB=3$，$BC=\sqrt{13}$，$CA=4$，$DA=DB=DC=3$ とし，頂点 D から△ABC に垂線 DH を下ろす。このとき，DH の長さは $\boxed{(ウ)}$，四面体 ABCD の体積は $\boxed{(エ)}$ である。

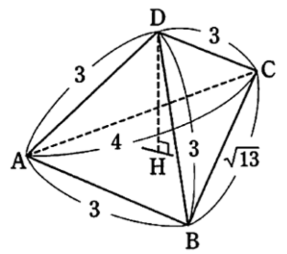
解　**(1)**　A は確率 $\dfrac{2}{3}$ で 1 点を，B は確率 $\dfrac{1}{3}$ で 2 点を得る．A が 3 回得点するか，B が 2 回得点したら終了する．

(ア)　B が 2 回得点するまでに A が得点した回数は，0 回以上 2 回以下である．よって，得点した人を並べた順列は BB，ABB，AABB のいずれかの並べかえで，最後は B であるから，確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_2C_1\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_3C_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{11}{27}}.$$

(イ)　得点した人を並べた順列は，A が勝つ場合 AAA で，B が勝つ場合 ABB の並べかえ（最後は B）であるから，確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+{}_2C_1\cdot\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}.$

(2)(ウ)　3 つの直角三角形 ADH，BDH，CDH は DH 共通，DA＝DB＝DC より合同なので，AH＝BH＝CH，つまり H は△ABC の外心である．△ABC において，



$$\cos A=\frac{3^2+4^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{2}\quad\therefore\quad \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり，AH は外接円の半径だから，正弦定理より

$$AH=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad DH=\sqrt{DA^2-AH^2}=\sqrt{3^2-\frac{13}{3}}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{14}{3}}}.$$

(エ)　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

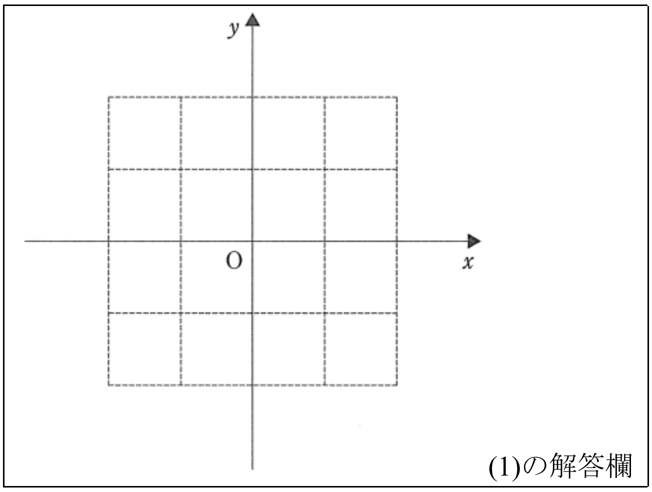
なので，四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot DH=\frac{1}{3}\cdot3\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{14}{3}}=\boldsymbol{\sqrt{14}}.$$

【４】2015 東京慈恵会医科大学 2/5, 一般（１次）東京都地域枠含む 医

n を 2 以上の整数の定数とする。xy 平面上に定点 A(1, 0) がある。y 軸上の点 P を通り x 軸に平行な直線上で，$\mathrm{AP}+\mathrm{PQ} \leqq n$ をみたす点 Q を考える。P が y 軸上を動くとき，Q の存在範囲を $D(n)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。問い(1)では $\boxed{}$ にあてはまる適切な式を解答欄に記入せよ。

(1)　$D(n)$ は不等式 $\boxed{\text{(オ)}}$ をみたす点$(x,\ y)$ 全体である。また，$D(2)$ を xy 平面上に図示せよ(xy 平面は解答用紙にある)。



(1)の解答欄

(2)　xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。$D(n)$ に含まれる格子点の個数 $S(n)$ を n を用いて表せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{(2n+1)^2}$ の値を求めよ。

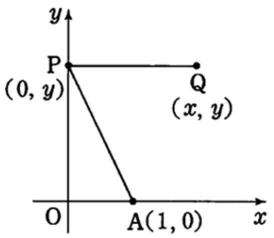
解　(1)　P$(0,\ y)$，Q$(x,\ y)$ とおくと，

$\mathrm{AP}=\sqrt{y^2+1}$，

$\mathrm{PQ}=|x|$

となる．よって，$D(n)$ は，

$\boldsymbol{\sqrt{y^2+1}+|x| \leqq n}$ ……①



をみたす点 $(x,\ y)$ 全体である．①は y 軸について対称な領域を表すから，まず，$x \geqq 0$ のもとで考えると，

$$\text{①} \iff \sqrt{y^2+1}+x \leqq n$$
$$\iff \sqrt{y^2+1} \leqq n-x$$
$$\iff y^2+1 \leqq (n-x)^2 \ \cdots\cdots\text{②} \text{ かつ } n-x \geqq 0$$
$$\iff (x-n)^2-y^2 \geqq 1 \text{ かつ } x \leqq n.$$

対称性とあわせて，$D(n)$ は図 1，$D(2)$ は図 2 の網目部で，いずれも境界を含む．

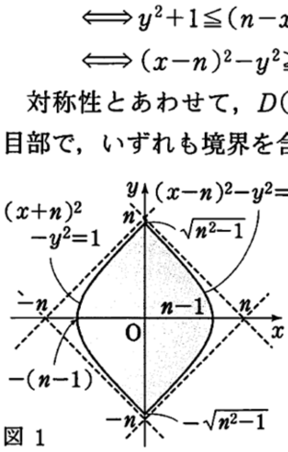


図 1

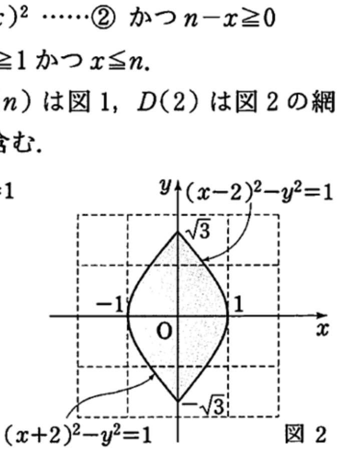


図 2

(2)　図 1 より，$D(n)$ は $|x| \leqq n-1$ の部分にある．

$x=k$（k は $0 \leqq k \leqq n-1$ をみたす整数）と固定すると，②より，y の範囲は

$$y^2 \leqq (n-k)^2-1$$
$$\therefore\quad -\sqrt{(n-k)^2-1} \leqq y \leqq \sqrt{(n-k)^2-1}$$

である．次に，

$$n-k-1 \leqq \sqrt{(n-k)^2-1} < n-k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

を示す．$0 \leqq k \leqq n-1$ より③の各辺は 0 以上なので，

$$(n-k-1)^2 \leqq (n-k)^2-1 < (n-k)^2$$

を示せばよい．右側は明らかで，左側は，

$$(\text{中辺})-(\text{左辺})=2(n-k-1) \geqq 0$$

より正しい．

よって，③が示されたので，$x=k$ 上の格子点は，$-(n-k-1) \leqq y \leqq n-k-1$ に対応する $2(n-k-1)+1=2(n-k)-1$ 個ある．

y 軸に関する対称性とあわせて，

$$S(n)=2n-1+2\sum_{k=1}^{n-1}\{2(n-k)-1\}$$

［等差数列の和の公式より］

$$=2n-1+2\cdot\frac{(2n-3)+1}{2}\cdot(n-1)$$
$$=\boldsymbol{2n^2-2n+1}.$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{(2n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}.$

【解答１】2013 東京慈恵会医科大学 2/5, １次 医

(1)　(ｱ) $\dfrac{3}{4}$　(ｲ) $\dfrac{3}{256}$　(ｳ) $\dfrac{157}{64}$

(2)　(ｴ) $\sqrt{3}$　(ｵ) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【解答２】2013 東京慈恵会医科大学 2/5, １次 医

(1)　$\sqrt{4-t^2}$　(2)　$\left(\sqrt{3}-\dfrac{9}{16}\right)\pi$

【解答３】2015 東京慈恵会医科大学 2/5, 一般(１次)東京都地域枠含む 医

(1)　(ア) $\dfrac{11}{27}$　(イ) $\dfrac{4}{9}$

(2)　(ウ) $\sqrt{\dfrac{14}{3}}$　(エ) $\sqrt{14}$

【解答４】2015 東京慈恵会医科大学 2/5, 一般(１次)東京都地域枠含む 医

(1)　$|x|+\sqrt{y^2+1} \leqq n$，次図　(2)　$S(n)=2n^2-2n+1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2}$