名古屋大学・数学セレクション１

【１】<V816M23> 2019 名古屋大学 2/26,前期 情報　理　医　工　農

正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1)　このような n の中で最小のものを求めよ。

(2)　このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

【２】<V816M24> 2019 名古屋大学 2/26,前期 情報　理　医　工　農

正の整数 n に対して $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ とする。この $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ に対して，各添字 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i=j\to a_j=k$ と書くことにする。ここで $a_i=j\to a_j=k\to a_k=l\to\cdots$ のようにたどり，それを続けていく。例えば $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)=(2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4,\ 3,\ 7)$ のとき，

(ⅰ)　$a_1=2\to a_2=5\to a_5=4\to a_4=1\to a_1=2$

(ⅱ)　$a_3=6\to a_6=3\to a_3=6$

(ⅲ)　$a_7=7\to a_7=7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)は長さがそれぞれ 4，2，1 のサイクルになっている。

(1)　$n=3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2)　$n=4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3)　n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}>\log(n+1)-\log k$$

を示せ。

(4)　n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p>\log 2$ をみたすことを示せ。

【３】<U816M23> 2018 名古屋大学 2/26,前期 情報　理　医　工　農

p を素数，a，b を整数とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　$(a+b)^p-a^p-b^p$ は p で割り切れることを示せ。

(2)　$(a+2)^p-a^p$ は偶数であることを示せ。

(3)　$(a+2)^p-a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。

【４】<U816M24> 2018 名古屋大学 2/26,前期 情報　理　医　工　農

図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P，Q が 6 個の頂点 A，B，C，D，E，F を以下の規則(a)，(b)に従って移動する。

(a)　時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる。

(b)　点 P，Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

時刻 n まで 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n まで 2 点 P，Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P，Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき，次の問に答えよ。

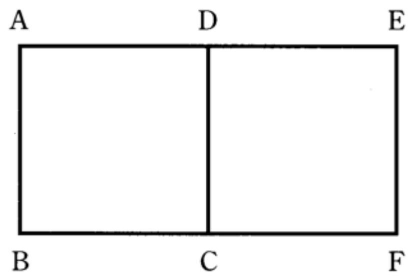


図 1

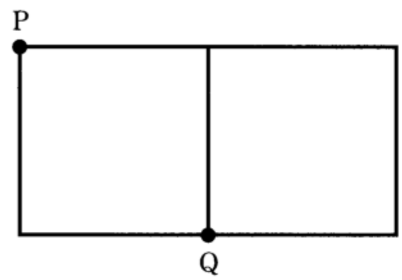


図 2

(1)　時刻 1 での点 P，Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ。

(2)　a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

(3)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(4)　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。

【解答１】<V816M23> 2019 名古屋大学 2/26,前期 情報　理　医　工　農

(1)　$n=26$　　　　(2)　145

【解答２】<V816M24> 2019 名古屋大学 2/26,前期 情報　理　医　工　農

(1)　$\dfrac{2}{3}$

(2)

$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(2,\ 3,\ 4,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1,\ 3),$

$(3,\ 4,\ 2,\ 1),\ (3,\ 1,\ 4,\ 2),\ (4,\ 3,\ 1,\ 2),\ (4,\ 1,\ 2,\ 3)$

(3)

$j \leqq x \leqq j+1$ において

$\dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{j}$

等号は常に成立しないので

$\displaystyle\int_j^{j+1}\frac{1}{x}dx < \int_j^{j+1}\frac{1}{j}dx$

$\log(j+1)-\log j < \dfrac{1}{j}$

$\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\{\log(j+1)-\log j\} < \sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}$

$\displaystyle\log(n+1)-\log k < \sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}$

(4)

$n=2l-1$ とおく(l は自然数)

$\dfrac{n+1}{2}=l$ であり，$l>\dfrac{n}{2}$ であるので，長さが l 以上のサイクルは最大の長さになる

$n \geqq 3$ のとき，$a_1 \sim a_{2l-1}$ のうちどの j 個がサイクルを作るか ${}_{2l-1}C_j$ 通り，このそれぞれに対して円順列の作り方は，$(j-1)!$ 通り，残りの数の並び方は $(2l-1-j)!$ 通り

よって，

$P=\dfrac{{}_{2l-1}C_j\,(j-1)!(2l-1-j)!}{(2l-1)!}=\dfrac{1}{j}$

これは $n=1$ も満たす

(3)より

$\displaystyle\sum_{j=l}^{2l-1}\frac{1}{j} > \log 2l-\log l=\log 2$

よって，$P>\log 2$

【解答３】<U816M23> 2018 名古屋大学 2/26,前期 情報　理　医　工　農

(1)

$\displaystyle(a+b)^p=a^p+b^p+\sum_{k=1}^{p-1}{}_pC_k a^k b^{p-k}$

ここで，${}_pC_k$ について考える(ただし，$1 \leqq k \leqq p-1$ を満たす整数)

$$ {}_pC_k = \frac{p!}{k!(p-k)!} $$

$p > k$， $p > p-k$ より，素数 p は約分されない。

また，${}_pC_k$ は整数であるので，${}_pC_k$ は p の倍数である。

よって，$(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れる。

(2)

$$ (a+2)^p - a^p = \sum_{k=1}^{p} 2^k a^{p-k} $$

$2^k a^{p-k}$ は偶数なので，$(a+2)^p - a^p$ は偶数となる。

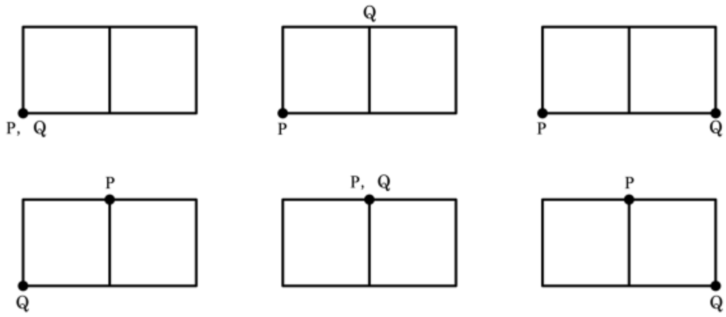
(3)

$p = 2$ のとき 0

$p \geqq 3$ のとき 2

【解答４】<U816M24> 2018 名古屋大学 2/26,前期 情報　理　医　工　農

(1)　次図　　　(2)　$a_1 = \frac{1}{2}$，$b_1 = \frac{1}{6}$，$a_2 = \frac{1}{3}$，$b_2 = \frac{1}{8}$



(3)　$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$，$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n$

(4)

$$ a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \leqq \frac{3}{4}(a_n + b_n) $$

よって

$$ a_n + b_n \leqq \frac{3}{4}(a_{n-1} + b_{n-1}) \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^2 (a_{n-2} + b_{n-2}) \leqq \cdots\cdots \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^n (a_0 + b_0) $$

$a_0 + b_0 = 1$ より

$$ p_n \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^n $$

以上より，題意は示せた。

【１】

解答 (1) $\sqrt{n}$ の整数部分を m とおくと，$\sqrt{n}$ が整数でないので，

$$m^2 < n < (m+1)^2 = m^2+2m+1$$

したがって，n と m^2 の差 $d = n - m^2$ は $1 \leqq d \leqq 2m$ をみたす．

$\sqrt{n}$ を 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるので，

$$\frac{1}{100} \leqq \sqrt{n} - m < \frac{1}{10}$$

$n = m^2 + d$ なので，これを変形して，

$$100m + 1 \leqq 100\sqrt{m^2+d} < 100m + 10$$

各辺は正なので，2 乗して，

$$\begin{aligned}10000m^2 + 200m + 1 &\leqq 10000(m^2+d)\\ &< 10000m^2 + 2000m + 100\end{aligned}$$

これから m の動ける範囲は

$$\frac{100d-1}{20} < m \leqq \frac{10000d-1}{200} \quad \cdots\cdots ①$$

① において $d=1$ とすると，$\dfrac{99}{20} < m \leqq \dfrac{9999}{200}$ であり，これをみたす最小の自然数 m は 5 である．

$d \geqq 2$ のとき $\dfrac{100d-1}{20} > 5$ なので，① をみたす最小の自然数 m は 5 である．

したがって，求める最小の n は，

$$5^2 + 1 = \mathbf{26}$$

である．

(2) ① において，$d=1$ のとき $5 \leqq m \leqq 49$ であり，

0

① において，$d=2$ のとき $\dfrac{199}{20} < m \leqq \dfrac{19999}{200}$ より，$10 \leqq m \leqq 99$ である．

また，① において，$d \geqq 3$ のとき $\dfrac{299}{20} < m$ なので，$m \geqq 15$ であり，このときの n は $n \geqq 15^2 + 3 = 228$ をみたす．

以上より，$d = 1,\ 2$ のときの条件をみたす自然数 n を表で表すと，

m	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$d=1$	26	37	50	65	82	101	122	145	170
$d=2$	×	×	×	×	×	102	123	146	171

表には 13 個の n の値が与えられており，表に出てこない $d=1,2$ のときの条件をみたす n は，$n \geqq 14^2+1 = 197$ をみたすので，小さい方から 10 番目の数は **145** である．

【２】

解答 (1) 一般に，順列 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ が長さ 1 のサイクルを含むための必要十分条件は，$a_j = j$ をみたす $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ が存在することである．

$n=3$ のとき，長さ 1 のサイクルを含むのは，

$$(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 3)$$

の 4 通りなので，求める確率は

$$\frac{4}{3!} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

である．

(2) $n=4$ のとき，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ が長さ 4 のサイクルを含むのは，

$$a_1 = j \to a_j = k \to a_k = l \to a_l = 1$$

の場合で，$j,\ k,\ l$ は 2, 3, 4 を並べかえたものであるので，

$$\mathbf{(2,\ 3,\ 4,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1,\ 3),\ (3,\ 4,\ 2,\ 1)}$$
$$\mathbf{(3,\ 1,\ 4,\ 2),\ (4,\ 3,\ 1,\ 2),\ (4,\ 1,\ 2,\ 3)}$$

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $x > 0$ で単調減少である．

よって，$j = k,\ k+1,\ \cdots,\ n$ に対し，$j \leqq x \leqq j+1$ において $f(j) \geqq f(x)$ であり，$j < x \leqq j+1$ では等号が不成立なので，

$$\int_j^{j+1} f(j)\,dx > \int_j^{j+1} f(x)\,dx,$$

すなわち，

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{j}\,dx > \int_j^{j+1} \frac{1}{x}\,dx$$

である．

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{j}\,dx = \left[\frac{1}{j}x\right]_j^{j+1} = \frac{1}{j}$$

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_j^{j+1} = \log(j+1) - \log j$$

なので，これを $j = k,\ k+1,\ \cdots,\ n$ について和をとると，

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} &> \sum_{j=k}^{n} \Big\{\log(j+1) - \log j\Big\}\\ &= \Big\{\log(k+1) - \log k\Big\}\\ &\qquad + \Big\{\log(k+2) - \log(k+1)\Big\} + \cdots\\ &\qquad + \Big\{\log(n+1) - \log n\Big\}\\ &= \log(n+1) - \log k\end{aligned}$$

(4) まず，順列内のすべての整数が 2 つのサイクルにまたがって登場することがないことに注意する．

$\dfrac{n+1}{2} > \dfrac{n}{2}$ なので，順列の中に長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルが存在したとすると，それはただ 1 つのみ存在する．

$n \geqq 3$ のとき，長さが j $\left(\dfrac{n+1}{2} \leqq j \leqq n\right)$ であるサイクルについて，構成する整数の選び方が ${}_n\mathrm{C}_j$（通り）である．

また，選ばれた j 個の整数を $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_j$ とするとき，これによって構成されるサイクルは

$$a_{p_1} = q_2 \to a_{q_2} = q_3 \to \cdots \to a_{q_j} = p_1$$

ただし，$q_2,\ q_3,\ \cdots,\ q_j$ は $p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_j$ を並びかえ

たものである．
この並びかえ方は $(j-1)!$（通り）ある．
残り $n-j$ 個の整数の並べ方は $(n-j)!$（通り）あるので，長さ j のサイクルを含む確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_j(j-1)!\,(n-j)!}{n!}=\frac{n!\,(j-1)!\,(n-j)!}{j!\,(n-j)!\,n!}=\frac{1}{j}$$

であり，$n=1$ のときは $j=1$ なので，これは $n=1$ のときも成立する．

(3) の不等式を $k=\dfrac{n+1}{2}$ で適用すると，

$$p=\sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n}\frac{1}{j}>\log(n+1)-\log\frac{n+1}{2}=\log 2$$

【３】

解答　(1)　二項定理より

$$\begin{aligned}&(a+b)^p-a^p-b^p\\&=(a^p+{}_p\mathrm{C}_1\,a^{p-1}b+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}\,ab^{p-1}+b^p)\\&\quad-a^p-b^p\\&={}_p\mathrm{C}_1\,a^{p-1}b+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}\,ab^{p-1}\qquad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで，

$${}_p\mathrm{C}_k=\frac{p!}{k!\,(p-k)!}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-1)$$

より

$${}_p\mathrm{C}_k\cdot k!=p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)$$

この式の右辺は p の倍数であるから，左辺も p の倍数である．さらに，p は素数であることと，$k<p$ より $k!$ は p の倍数ではない．
よって，

$${}_p\mathrm{C}_k \text{ は } p \text{ の倍数}\qquad\cdots\cdots②$$

①，② より題意は示された．

(2)　二項定理より

$$\begin{aligned}&(a+2)^p-a^p\\&=(a^p+{}_p\mathrm{C}_1\,a^{p-1}\cdot 2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}\,a\cdot 2^{p-1}+2^p)\\&\quad-a^p\\&={}_p\mathrm{C}_1\,a^{p-1}\cdot 2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}\,a\cdot 2^{p-1}+2^p\ \cdots\cdots③\end{aligned}$$

③ の p 個の項はすべて 2 の倍数であるから題意は示された．

(3)　③ より

$$(a+2)^p-a^p=\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k\,a^{p-k}2^k+2^p$$

② に注意すると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k\,a^{k-1}2^k$ は $2p$ で割り切れるので，$(a+2)^p-a^p$ を $2p$ で割った余りは 2^p を $2p$ で割った余りに等しい．

(i)　$p=2$ のとき
$2^p\ (=2^2)$ を $2p\ (=4)$ で割った余りは 0 である．

(ii)　$p\geqq 3$ のとき
① において $a=b=1$ とすると

$$(1+1)^p-1^p-1^p=\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k$$

$$2^p=\sum_{k=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_k+2$$

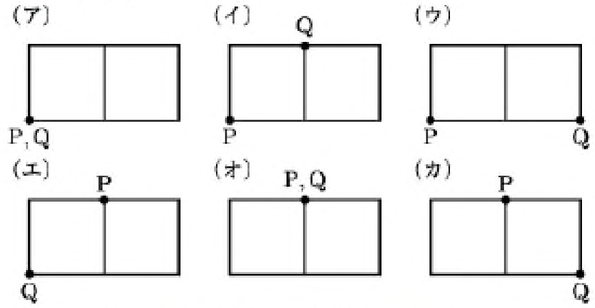
この式と ② より 2^p を p で割った余りは 2 であり，2^p は 2 の倍数であるから，2^p を $2p$ で割った余りは 2 である．

(i)，(ii) より求める余りは

$$\begin{cases}\mathbf{0}\quad(p=2\text{ のとき})\\\mathbf{2}\quad(p\geqq 3\text{ のとき})\end{cases}$$

【４】

解 答　(1)



(2)　(1) の 6 通りはすべて同様に確からしい．

a_1 は（イ），（エ），（カ）となる確率であるから，

$$a_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b_1 は（ウ）となる確率であるから，　$b_1 = \frac{1}{6}$

時刻 1, 2, 3, $\cdots$ において P，Q の位置関係は次の 3 通りである．

X: 同じ正方形の対角線の異なる端点（(1) では（イ），（エ），（カ））

Y: 線分 AE または線分 BF の異なる端点（(1) では（ウ））

Z: 同じ点（(1) では（ア），（オ））

a_2 は，時刻 1 で X または Y であり，時刻 2 で X となる確率である．

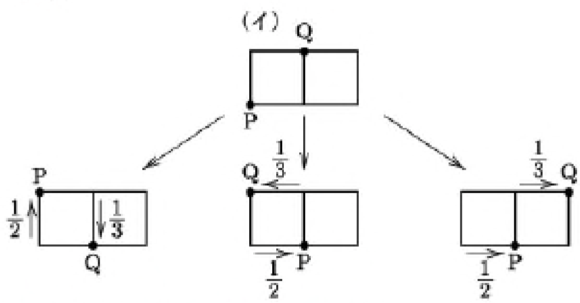
（イ），（エ），（カ）からはいずれも $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\times 3 = \frac{1}{2}$ の確率で時刻 2 で X となり，（ウ）からは $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times 2 = \frac{1}{2}$ の確率で時刻 2 で X となるので

$$a_2 = a_1 \times \frac{1}{2} + b_1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

b_2 は，時刻 1 で X または Y であり，時刻 2 において Y となる確率であるから，a_2 と同様に考えて

$$b_2 = a_1 \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + b_1 \times \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

［参考］（イ）から時刻 2 で X となる様子は次のとおり．



(3)　(2) と同様に考えると，帰納的に

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \qquad \cdots\cdots①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{4}b_n \qquad \cdots\cdots②$$

(4)　① + ② より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{3}{4}b_n \leqq \frac{3}{4}(a_n + b_n)$$

$\therefore\ p_{n+1} \leqq \frac{3}{4}p_n$

これをくり返し用いて

$$p_n \leqq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} p_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}(a_1 + b_1)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}$$

$$< \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$